# УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА И ПРОПЕДЕВТИЧНОТО ИМ ИЗУЧАВАНЕ В НАЧАЛНИЯ ЕТАП НА СРЕДНОТО УЧИЛИЩЕ

***Владимира Ангелова***

Целта на настоящата статия е да представим проучванията ни относно същността на понятията уравнение и неравенство в научната литература, да осъществим логическия им анализ, и съобразно с това, да предложим методически акценти за пропедевтичното им изучаване в началния етап на средното училище.

## 1. Понятията *уравнение и неравенство* и логическият им анализ

Като основа за изграждане на съвременното учение за уравненията и неравенствата служи математическата логика, и по-точно, понятието *предикат*. Уравненията и неравенствата се разглеждат като вид предикати.

Ето как се дефинира понятието *предикат*.

Всяка функция $f$, дефинирана в множество $D$ и приемаща стойности от множеството на съжденията, се нарича *предикат* (*съждителна функция*, *съждителна форма*, *открито съждение*).

Аналогично се интерпретира понятието *предикат* в [4].

С всеки предикат са свързани две множества:

1) *Дефиниционно множество D*. То се състои от всички стойности, които могат да приемат променливите на предиката.

2) *Множество на верност W*. То се състои от всички стойности на променливата, които превръщат предиката във вярно съждение.

В сила е включването: $W$H$D$.

*Пример 1*. За предиката "$f(x)$: Естественото число $x$ се дели на 3", дефиниционното множество е множеството на естествените числа, т.е. $D = N$, а множеството на вярност е $W = \{3; 6; 9; 12; 15; ...; 3n; ...\}$, $n$O$N$.

От всяка съждителна функция може да се получи съждение по два начина:

➢ Свободните променливи се заменят с конкретни стойности от дефиниционното множество на съждителната функция.

*Пример 2*. Ако в съждителната функция $f(x)$: $x< 6$, $x\in N$, заменим $x$ с конкретно число, например 3; 7, получаваме съжденията:

3 <6 (вярно); 7 <6 (невярно).

➢ Свободните променливи се свързват с квантора за общност „$\forall$“ или с квантора за съществуване „$\exists$“.

*Пример 3*. От съждителната функция $f(x)$: $2 \,.\, x + 7 = 35$, $x$O$N$, можем да получим следните съждения:

„За всяко естествено число е в сила равенството $2 \,.\, x + 7 = 35$.“

„Съществува естествено число, за което е в сила равенството $2 \,.\, x + 7 = 35$.“

За да осъществим логическия анализ на понятията *уравнение* и *неравенство*, ще приведем техните определения [3].

Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са алгебрични изрази с променлива $x$, $x\in D$. Едноместният предикат $f_1(x)= f_2(x)$, $xD$, се нарича *уравнение* с една променлива. *Корен* (*решение*) на едно уравнение се нарича такава стойност на променливата, за която след заместване в уравнението, се получава вярно числово равенство. *Да се реши* едно уравнение, означава да се намерят корените му или да се установи, че то няма корени. С други думи: означава да се намери множеството на вярност на предиката.

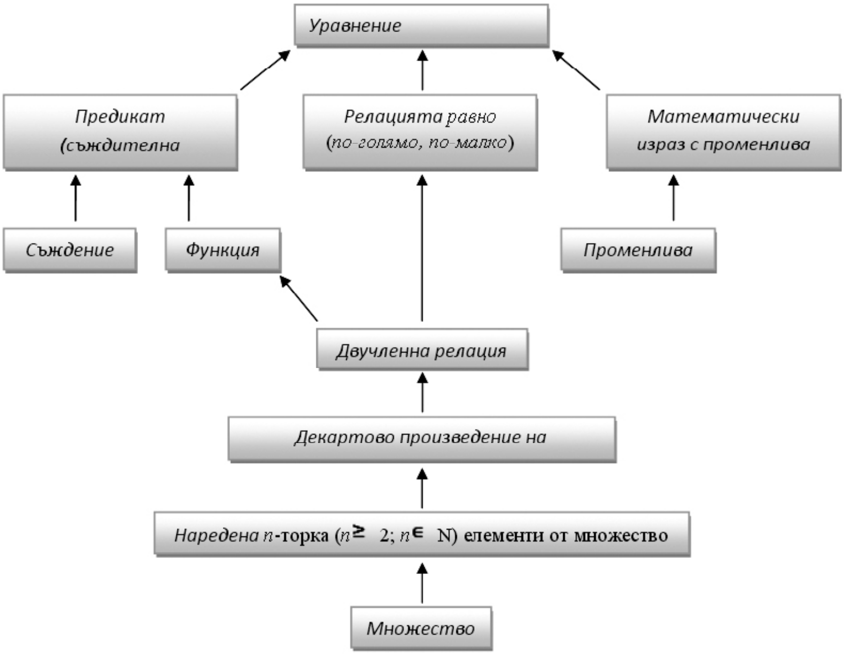
Нека $f_1(x)$и $f_2(x)$ са алгебрични изрази с променлива $x$, $xD$. Едноместният предикат $f_1(x)<f_2(x)$, $xD$ (съотв. $f_1(x)>f_2(x)$, $xD$), се нарича *неравенство* с една променлива. Стойност на променливата, за която от дадено неравенство се получава вярно числово неравенство, се нарича *решение* на неравенството. *Да се реши* едно неравенство означава да се намерят всичките му решения или да се установи, че то няма решение.

Аналогично се дефинират уравнения и неравенства с две и повече променливи.

Въз основа на представените теоретични постановки ще осъществим логически анализ на понятията *уравнение* и *неравенство*.

За да се определи понятието *уравнение* (*неравенство*) с една или повече променливи е необходимо формирането на понятията: израз с променлива, релацията *равно* (*по-голямо*, *по-малко*), *предикат*. За определянето на тези понятия са необходими знания за понятията: функция, съждение, променлива, двучленна релация. Необходими са знания и за понятията: декартово произведение на множества, наредена $n$-торка ($n \geq 2$; $n \in N$) елемент и от множество и множество.

Трактовката на понятието уравнение (неравенство) може да се представи със следната логическа схема:




Логическият анализ е необходим за разработване на подходяща методика за пропедевтика, формиране и развитие на понятията уравнение и неравенство в среднотоучилище.

## 2. Пропедевтично изучаване на понятията *уравнение* и *неравенство* и на понятията, свързани с тях

Понятията за равенство и неравенство при обучението по математика се разкриват въз основа на тяхната взаимовръзка. Изучаването им естествено се съчетава с изучаването на числата и аритметичните действия с тях.

Учебните програми по математика за средното училище не предвиждат формиране на понятието *предикат*, но постоянно се решават задачи, свързани с това понятие.

Като пропедевтични упражнения могат да се използват още от началния етап на образование предикати от различно естество, като за основа служат знанията на учениците по всички учебни предмети.

За означаване на променливите могат да се използват различни символи: □, ○, ◇, многоточие, букви и др.

Да започнем със следния *пример*.

Град ................. е столица на България.

Това изречение е едноместен предикат. Ако на мястото на многоточието се постави името на град София, ще се получи вярно съждение. Акообаче се постави името на друг град, ще се получи невярно съждение. Дефиниционно множество на този предикат е множеството на градовете, а множество на вярност се състои само от един елемент. На учениците се разяснява, че на мястото на многоточието трябва да поставят името на града, така че полученото твърдение да е вярно.

Ще посочим още *примери* за едноместни предикати или такива, свързани с тях. Необходимо е учениците да разберат, че многоточията, празните квадратчета или други означения трябва да се заменят с подходящи думи (термини) или символи.

❖ Планетата ............... прави една обиколка около Слънцето за 365 дни.

❖ Най-малката планета на Слънчевата система е ...................

❖ Реката ................ се влива в Черно море.

❖ ....................... е български композитор.

❖ Моето родно място е …………….

*Примери* от началната училищна математика:

1) Естественото число .....е четно.

Дефиниционно множество на този предикат е множеството на естествените числа, а множество на вярност се състои четните естествени числа.

2) За кои от числата 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10, поставени на мястото на многоточието, се получава вярно твърдение?

*Естественото число ..... се дели на 5.*

Дефиниционното множество на този предикат е {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}, а множеството на вярност – {5; 10}.

3) Естественото число ….. е едноцифрено.

4) Сборът на числото.....и числото 15 е равен на 25.

5) Естественото число.....е по-голямо от 99 и по-малко от числото 101.

6) За кои от числата 1; 2; 3; 4; 5 и 6 е вярно твърдението?

а) Числото .....е четно; б) Числото ..... е нечетно;

в) Числото..... се дели на 3; г) Числото.....се дели на 2 и на 3.

7) За кои от числата 2; 3; 4; 5; 6, поставени на мястото на мястото на празното квадратче, е вярно 25 – □>20?

*Примери* за двуместни предикати:

1) Град ........... се намира на брега на ........... море.

2) ........... е брат на ...........

3) ........... е по-висок от ...........

4) За кои от числата 1; 2; 3; 4; 5; 6, поставени на мястото на многоточието, се получава вярно твърдение?

Числото ..... е по-малко от числото .....

Числото ...... се дели на числото .....

Числото ..... е с 2 по-голямо от числото .....

Произведението на числата ..... и ..... е равно на 6.

Сборът на числата ..... и ..... е равен на 5.

Според Учебните програми по математика за 1. – 4. клас учениците трябва да знаят връзките между компонентите при аритметичните действия и да ги използват за намиране на неизвестен компонент при равенства с неизвестно число.

Не се въвеждат термините *уравнение* и *неравенство*. Използват се формулировките:

Открийте неизвестното число: 20 + □ = 60; 80 – □ = 30.

Намерете неизвестното събираемо: 30 + □ = 50; □ + 28 = 100 + 12.

Намерете неизвестното умаляемо (умалител):
□ – 30 = 20; (90 – □ = 70 + 8).

Намерете неизвестния множител: □ . 5 = 20; 30 + 12 = 6 . □.

Намеретенеизвестното делимо (делител): □ : 3 = 2; (40 : □ = 8).

Кое от числата 10; 8; 6; 12 и 16 трябва да се постави на мястото на празното квадратче, за да се получи вярно равенство? 18 + □ = 26

Кое число трябва да се постави на мястото на празното квадратче, за да се получи вярно равенство? □. 8 = 24

Учениците от началния етап на образование определят неизвестния компонент в равенства по два начина:

1) Въз основа на знанията си за аритметичните действия чрез „налучкване" на неизвестното и проверка за правилността на избора му.

2) Въз основа на съответното правило за намиране на неизвестен компонент. Тези правила се формулират благодарение на предварително усвоените от учениците зависимости между компонентите и резултатите при аритметичните действия.

Уравнението (равенството с неизвестно число) се използва като математически модел на описаната в задачата ситуация.

При задачи от вида: „Ангел намислил едно число. Умножил го с 5 и получил 40. Кое число е намислил Ангел?" уравнението е превод от говоримия език на символичния език на математиката. Ако означим намисленото число с □, съобразно текста на задачата, се получава равенството □ . 5 = 40.

Подходящи текстови задачи, които се моделират чрез равенство с неизвестно, са задачите от *деление по съдържание*.

Например: Иво имал няколко банкноти по 5 лв. на стойност 40 лв. Колко банкноти е имал Иво?

Тази задача се моделира със същото равенство □ . 5 = 40, където с □ е означен броят на банкнотите.

Последните два примера, които демонстрират решението на математическа и практическа задача с помощта на уравнение, показват още, че различни ситуации могат да се опишат с един и същи математически модел.

Традиционната практика на преподаването е доказала, че учениците могат да се научат да решават уравнения, т.е. да откриват неизвестно число в равенство и без да знаят що е уравнение. Усвояват се отделни алгоритми за решаване на уравнения от определен вид.

Формирането на алгебричните понятия не се довежда до формално-логическо определение. А едва ли това е целесъобразно. За началния етап на образование е подходящо да се използва интуитивното понятие *равенство (неравенство) с неизвестно*.

Пропедевтика на по-голяма част от понятията, необходими за формиране на понятията уравнение и неравенство, са представени в [1] и [2]. За формиране на понятията *уравнение* и *неравенство*, съобразно логическия им анализ, са необходими знания за понятието *променлива*.

Специфично за математическия език е използването на променливи. Чрез тяхмогат да се изразят различни закони и закономерности. За означаване на променлива се използва обикновено буква (например„*x*“). Тя се поставя в текста на подходящо място, което позволява да се попълни с имената на елементите на дадено множество – областта на допустимите стойности на променливата.

Формирането на понятието *променлива* у учениците е продължителен процес. Разяснява се на различни равнища в зависимост от етапа на обучение. Началото му може да започне от първи клас на средното училище.

По действащите в момента учебници по математика за 1. – 4. клас буквена символика не се въвежда. За означаване на неизвестен компонент при равенства и неравенства се използва най-често празното квадратче □. На този етап означаването на променлива с буква се осъществява в пети клас.

Упражненията за откриване на неизвестен компонент при уравненията и неравенствата се формулират примерно така:

Кое число трябва да се постави в □? (Открийте пропуснатите числа:)

6 + □ = 108 – □ = 5□ . 5 = 20□ : 2 = 312 : □ = 4

6 + □< 108 – □> 5□ . 5 < 20□ : 2 <312 : □> 4.

Задачата, формулирана по този начин, няма еднозначно решение. В празното квадратче може да се постави кое да е число.

Тогава ще се получат както верни, така и неверни равенства (съотв. неравенства). Такава постановка на задачата не спомага за пропедевтика на понятието *променлива*.

Нека упражненията от този вид формулираме по следния начин:

Кои от числата 3; 4; 5; 6 могат да се поставят в □, така че да се получи вярно равенство?

5 + □ = 86 – □ = 2□ . 4 = 12□ : 3 = 215 : □ = 3

Ако сменим посочените числа, например с 8; 9; 10, със същото условие ще получим, че нито едно от тези числа не може да се запише в празното квадратче, така че равенствата да са верни.

Аналогично може да се формулират задачи, свързани с променлива в неравенства. *Например*:

1) Кои от числата 9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90 могат да се поставят в □?

□ : 9 <5 □ : 9 >5.

2) Кои от числата 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 могат да се поставят в □, така че да се получават верни записи:

а) 45 + □>54; б) 45 + □ = 54; в) 45 + □< 54.

Вниманието на учениците се насочва към факта, че верността на равенството или неравенството зависи от избора на множеството от числа, над които се разглеждат. Според нас това е едно от пропедевтичните упражнения, чрез които по-нататък учениците могат да разберат, че множеството на решенията на уравнението (или неравенството) зависи от дефиниционната област на променливата.

Педагогическият подход за поставяне на числа в празно квадратче или в друг символ със същото значение е подходящ за малките ученици. Чрез него сполучливо могат да се записват в обобщен вид някои свойства на аритметичните действия. *Например*:

- Разместително свойство на събирането: □, ○, ○, □
- Разместително свойство на умножението: □ . ○ = ○ . □
- Съдружително свойство на събирането: (□ + ○) + ◇ = □ + (○+ ◇)
- Съдружително свойство на умножението:(□ . ○) . ◇ = □ . (○. ◇)
- Разпределително свойство на умножението относно събирането:

(□ + ○) . ◇ = □ . ◇ + ○. ◇; ◇ . (□ + ○) = ◇ . □+ ◇ . ○

• Разпределително свойство на делението относно събирането: (□ + ○) : ◇ = □ : ◇ + ○: ◇.

На учениците се обяснява, че в един и същи символ се поставя едно и също число. Изисква се в посочените примери да се поставят определени числа, така че да се получат верни равенства.

Разбира се, по-нататък се разяснява, че за по-голямо удобство вместо такива символи с различни форми се използват различни букви. Тези букви се наричат *променливи*. Числата, които могат да се поставят вместо тези букви, се наричат техни *стойности*. Когато се оперира с променливи, трябва винаги да се отчита тяхната дефиниционна област.

Според нас тези упражнения са по възможностите на по-голямата част от учениците от началнияетап. Тяхното използване е необходимо да продължи в прогимназиалния етап.

Уравненията и неравенствата е необходимо да се изучават в средното училище, защото чрез тях се отразяват на символичния език на математиката важни практически и математически задачи. Освен това уравненията и неравенствата могат да се използват като ефективно средство за затвърдяване на знанията и за развитие на творческата математическа дейност на учениците.

Дотук представихме идеите си, свързани с пропедевтичното изучаване на уравненията и неравенствата в началния етап на средното училище. Това създава предпоставки за продължение на темата в други етапи на образованието.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. *Ангелова, В.* Релации и методика на изучаването им в началния етап на средното общообразователно училище. – В: Съвременни педагогически теории и практики. Пловдив: Унив. изд. Паисий Хилендарски, 2011.

2. *Ангелова, В.* Понятието функция и пропедевтика на изучаванетому в началнияетап на средното училище. – В: Иновации в обучението и познавателното развитие. Бургас, 2011.

3. *Виленкин, Н., Пышкало, А.* Математика. М.: Просвещение, 1997.

4. http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/skordev/ln/lp/new/sydyrzha.htm

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА
И ПРОПЕДЕВТИЧНОТО ИМ ИЗУЧАВАНЕ
В НАЧАЛНИЯ ЕТАП НА СРЕДНОТО УЧИЛИЩЕ

ВЛАДИМИРА АНГЕЛОВА

Резюме

Уравненията и неравенствата е необходимо да се изучават в средното училище, защото чрез тях се отразяват на символичния език на математиката важни практически и математически задачи. Освен това уравненията и неравенствата могат да се използват като ефективно средство за затвърдяване на знанията и за развитие на творческата математическа дейност на учениците.

Целта на настоящата статия е да представим проучванията си относно същността на понятията *уравнение* и *неравенство* в научната литература, да осъществим логическия им анализ и съобразно с това да предложим методически акценти за пропедевтичното им изучаване в началния етап на средното училище.

**Ключови думи:** уравнение, неравенство, логически анализ

EQUATIONS AND INEQUALITIES AND THEIR
PROPAEDEUTIC STUDY IN PRIMARYSCHOOL

VLADIMIRA ANGELOVA

Summary

The aim of the following article is to present our research on the essence of the concept of equation and inequality in science literature, to accomplish their logical analysis and according to that – to propose methodical accents on their propaedeutic study in primary school.

**Key words**: equation, inequality, predicate