РЕФЛЕКСИЯТА И ТВОРЧЕСКИТЕ ПОСТИЖЕНИЯ НА ИЗЯВЕНИТЕ ПО МАТЕМАТИКА УЧЕНИЦИ ПРИ РЕШАВАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ

Марга Георгиева, Иван Ганчев

КЛЮЧОВИ ДУМИ: рефлексия, рефлексивно действие, рефлексивно обучение, геометрична задача, система от класове задачи, обобщения, творчески постижения.

АБСТРАКТ: В настоящата разработка се търси връзка между творческите постижения на изявените по математика ученици в областта на геометрията и понятието рефлексия като психическо новообразувание, свързано с осъзнаването на мотивите и целеобразуването.

Предлага се концептуален модел на рефлексивно обучение и съответна технология (фиг.1, 2, 3).

Систематизирани са основните етапи. Посочено е съответно приложение за евентуална подготовка на изявени за творчески постижения ученици в областта на геометрията.

* * *

Проблемът за творческите постижения е непрекъснато на вниманието на значителна част от психологическите изследвания ([6] [8] [14].) .)

Учениците с творчески постижения твърде много се доближават до творческата личност, отличаваща се с:

* увереност в себе си;

* висока самооценка;

* ориентираност към високи творчески постижения(поставяне на високи стандарти и полагане на усилия за реализирането им).

Посоченото е в тясна връзка с понятието рефлексия:

* психическо новообразувание, свързано с осъзнаването на мотивите и целеобразуването;

* водеща дейност в психическото развитие на човека.

Много са авторите ([4], [6], [9]......), които в своите публикации систематизират новите елементи в интерпретацията на проблема за рефлексията.

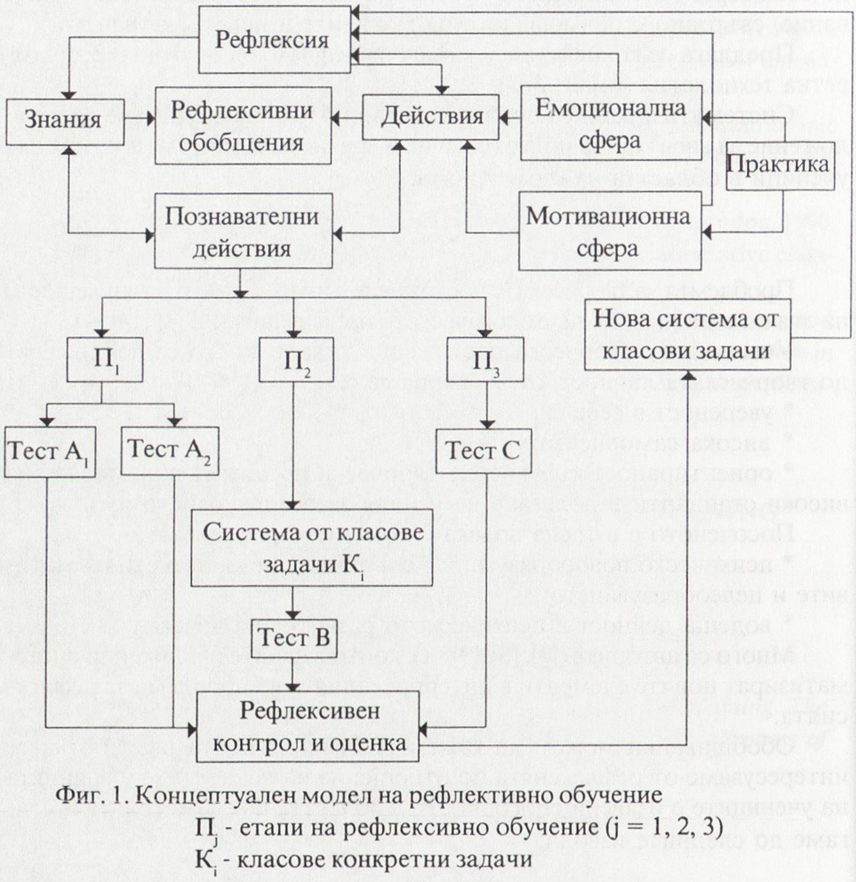
Обобщавайки можем да кажем, че в настоящата разработка се интересуваме от рефлексията по отношение на дейностите и знанията на учениците с изявени способности в областта на геометрията и стигаме до следните изводи:

* когато дейността е водеща при решаване на геометрични задачи, рефлексията експлицитно се описва с понятията: способност, умение, новообразуване и в този случай става въпрос за рефлексия по отношение на действията;

* когато знанието е водещо в обучението, рефлексията се разглежда като процес, който транслира информацията в личностно знание и в този случай става въпрос за рефлексия по отношение на знанието.

1. Същност на технологията на рефлексивно обучение при решаване на геометрични задачи или на задачи, чието решаване се свежда до решаването на геометрични задачи.

В основата на тази технология стои концептуалният модел от фиг.1 Налице е следната последователност от етапи:



Фиг. 1. Концептуален модел на рефлективно обучение

$П_j$ - етапи на рефлексивно обучение (j = 1, 2, 3)

$К_i$ - класове конкретни задачи

I етап:

* провеждане на тест за творчески постижения най-общо в областта на математиката в рамките на съществуващото обучение по настоящите стандарти, чийто въпроси образуват система от класове[1] задачи (A_1);

* провеждане на тест за творчески постижения извън границите на училищния стандарт, най-общо в областта на математиката, чиито въпроси образуват система от класове задачи и са с по-висока степен на сложност (A_2)

II етап:

* провеждане на тест за творчески постижения в областта на геометрията извън границите на училищния стандарт, чиито въпроси образуват система от класове задачи (В);

Достигането до теста В става чрез:

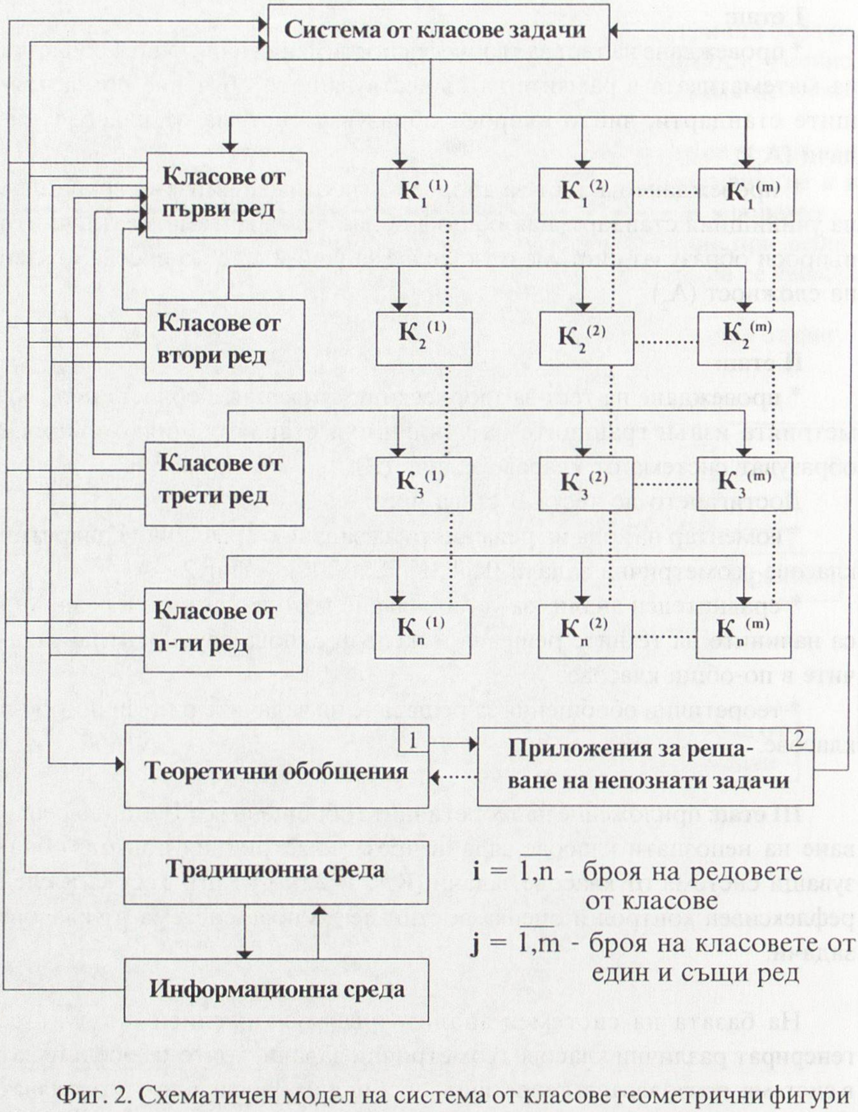
* коментар на хода на решенията на задачи от различни конкретни класове геометрични задачи ($K_1^{(1)}, K_1^{(2)},\dots K_1^{(m)}$); - фиг.2

* сравнителен анализ за установяване доколко сходни и различни са начините на техните решения и на тази основа групиране на задачите в по-общи класове;

* теоретични обобщения за решаване на задачите от тези по-общи класове.

III етап: приложение на теоретичните обобщения от II етап за решаване на непознати класове задачи чрез геометричния подход, образуващи система от класове задачи ($\mathbf{K_i^{(j)}}$, $\mathbf{i=\overline{2,n}}$, $\mathbf{g=\overline{1,m}}$). Тест С и след рефлексивен контрол и оценка достигане до нова система от класове задачи.

На базата на системен анализ чрез мултимедиен продукт се генерират различни класове геометрични задачи, които се обединяват в система, позволяваща теоретични обобщения. Последните позволяват непрекъснато движение между блоковете 1 и 2 — фиг. 2.



Фиг. 2. Схематичен модел на система от класове геометрични фигури

Системата от класове задачи (виж приложението), посочена по долу е примерна и е върху основата на геометрични задачи (прилага се принципът на нагледността като се използват новите информационни технологии - мултимедия и хипермедия) за развитие на рефлексивните способности на ученици с творчески постижения, участващи в различни математически олимпиади, състезания, научни конференции и др.

Предимството на разглежданата технология е в това, че в основата ѝ стои нагледността като средство в обучението при решаване на задачи, защото именно голяма част от зрителните представи са действителна опора на мисловните дейности. Наред с това в основата ѝ стои и принципът за икономичност по отношение на вложени умствени усилия и изразходвано време. Активизирана е и мотивационната и емоционалната сфера, имаща за основа реалните творчески постижения на обучаваните.

Геометричните модели, разглеждани особено в тяхната динамика при наличието на съвременни информационни технологии, допринасят за по-бързо осмисляне и преценяване на действията при които се проверяват хипотези във вътрешен план.

2. Система от класове задачи

Систематизирането на класове от задачи в настоящата разработка съдържа две основни положения:

* решенията на класовете задачи от по-висок ред съдържат задачи - компоненти на класове задачи от по-нисък ред.

*всеки клас от смесени задачи **($K_2^{(j)}$, $i=\overline{2,n}$, $j=\overline{1,m}$)** от даден ред съдържа задачи — компоненти на задачите от същия ред и задачи компоненти на класовете задачи от I ред.

Освен това трябва да се има предвид, че представянето на решенията на задачите от класовете на посочените по-горе два начина не е еднозначно. Може да се използват различни представяния на основните задачи и техните задачи — компоненти от I ред. В това се състоят и творческите постижения на решаващите ги. Подобно систематизиране води до поетапно формиране на умения за решаване на задачи и спомага да се намалява трудността на решението на всяка задача. Възприетият геометричен подход извиква на преден план принципите на нагледност и икономичност, т. е. позволява по икономичен преход от познати към непознати математически дейности при решаване на дадена задача **А** това означава когнитивен процес с функции на ориентация и регулация, следователно рефлексия, която "включва възприемане, анализиране, осмисляне, разсъждаване по повод на собствена дейност" ([5], с.491) система от изследователски актове на учащия, насочена към себе си, т.е. към саморазвитие на личността.

По-долу е посочена примерна система от класове задачи във вид на програма, в границите на II етап от технологията на рефлексивното обучение (фиг.1).

I) Класове задачи от I ред (**$K_1^{(j)}$, $j=\overline{1,m}$**)

Задачите от тези класове са чисто геометрични:

*$K_1^{(1)}$ - геометрична фигура. Дължина на отсечка и начупена линия. Неравенства между страните на триъгълника.

*$K_1^{(2)}$ - еднакви фигури в $E_2(E_3)^3$;

*$K_1^{(3)}$ - подобни фигури в $E_2(E_3)$;

*$K_1^{(4)}$ - метрични зависимости в $E_2(E_3)$;

*$K_1^{(5)}$ - лица на фигури в E_2;

*$K_1^{(6)}$ - геометрични преобразувания в $E_2(E_3)$;

*$K_1^{(7)}$ - тригонометрични зависимости. Тригонометрични уравнения. Синусова и косинусова теорема;

*$K_1^{(8)}$ - геометрични тела - сечения в E_3;

*$K_1^{(9)}$ - геометрични тела - лица на повърхнини и обеми на тела в E3;

*$K_1^{(10)}$ - вектори в $E_2(E_3)$;

.

.

.

*$K_1^{(m)}$ - смесени геометрични задачи, чийто решения съдържат елементи от решенията на **$K_1^{(j)}$, $j=\overline{1,m-1}$**

II) Класове задачи от II ред (**$K_2^{(j)}$, $j=\overline{1,m}$**)

Задачи от алгебрата, решаването на които се свежда до решаването на класове геометрични задачи от I ред - **$K_1^{(j)}$, $j=\overline{1,m}$**

*$K_2^{(1)}$ - уравнения;

*$K_2^{(2)}$ - неравенства;

*$K_2^{(3)}$ - системи уравнения;

*$K_2^{(4)}$ - системи неравенства.

.

.

*$K_2^{(m)}$ - смесени алгебрични задачи, чиито решения съдържат елементи от решенията на **$K_2^{(j)}$, $j=\overline{1,m-1}$**

III. Класове задачи от III ред $K_3^{(j)}$, $j=\overline{1,m}$

Задачи от математически анализ, решаването на които се свежда до решаването на класове задачи от I ред (**$K_1^{(j)}$, $j=\overline{1,m}$**)

*$K_3^{(1)}$ — функция на една променлива граница, непрекъснатост;

*$K_3^{(2)}$ - производна на функция на една променлива, монотонност, екстремуми, инфлексия;

*$K_3^{(3)}$ - изследване на функции, графики;

.

.

.

*$K_3^{(m)}$ - смесени задачи, чийто решения съдържат елементи от решенията на задачите от $\mathbf{K_3^{(j)}, j=\overline{1,m-1}}$

IV. Класове задачи от IV ред ($\mathbf{K_4^{(j)}, j=\overline{1,m}}$)

Задачи от комбинаторика, решаването на които се свежда до решаването на класове задачи от I ред ($\mathbf{K_1^{(j)}, j=\overline{1,m}}$)

*$K_4^{(1)}$ - покрития;

*$K_4^{(2)}$ - опаковки;

*$K_4^{(3)}$ - решетки;

.

.

.

*$K_4^{(m)}$ - смесени задачи, чийто решения съдържат елемент от $\mathbf{K_4^{(j)}, j=\overline{1,m-1}}$

V. Класове задачи от V ред ($\mathbf{K_5^{(j)}, j=\overline{1,m}}$)

Задачи от вероятности, решаването на които се свежда до решаването на класове задачи от I ред ($\mathbf{K_1^{(j)}, j=\overline{1,m}}$)

*$K_5^{(1)}$ - събиране на вероятности;

*$K_5^{(2)}$ - умножение на вероятности;

.

.

*$K_5^{(m)}$ - смесени задачи, чийто решения съдържат елементи от ($\mathbf{K_5^{(j)}, j=\overline{1,m-1}}$)

VI. Класове задачи от VI ред ($\mathbf{K_6^{(j)}, j=\overline{1,m}}$)

Задачи от теория на графите, решаването на които са свежда до решаването на класове задачи от I ред ($\mathbf{K_1^{(j)}, j=\overline{1,m}}$)

*$K6^{(1)}$ - естремални задачи;

*$K6^{(2)}$ - оцветяване;

*$K6^{(3)}$ - случайни графи;

:

*$K6^{(m)}$ - смесени задачи, чиито решения съдържат елементи от ($\mathbf{K_6^{(j)}, j=\overline{1,m-1}}$)

.

(n) Класове от n-ти ред ($K_n^{(j)}$, $j=\overline{1,m}$)

*$Kn^{(1)}$ - ....

*$Kn^{(2)}$ - ....

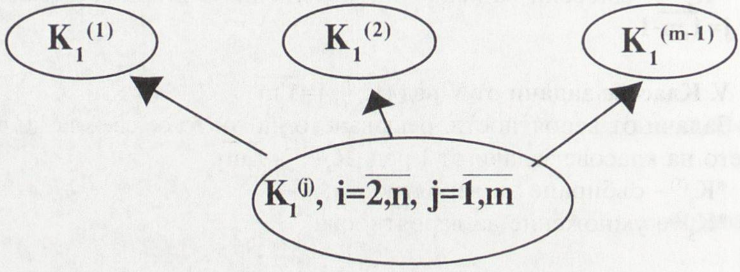
:

*$Kn^{(m)}$ - ....

Или по общо нека е дадена една съвкупност от класове задачи $\mathbf{K_i^{(j)}, i=\overline{1,n}, /j=\overline{1,m}}$ (виж матрицата на фиг. 4) Нека по редове са записани класове задачи от един и същи раздел. Например, $\mathbf{K_1^{(j)}, j=\overline{1,m}}$ са класове задачи от геометрията; $\mathbf{K_2^{(j)}, j=1,m}$ са класове задачи от алгебрата (виж формулите (2)) и т.н.

За всеки клас $\mathbf{K_i^{(j)}}$, където $\mathbf{i=\overline{1,n}}$, а j остава постоянно (т. е. класовете $\mathbf{K_i^{(j)}}$ са от определен стълб на матрицата) се търсят задачи, чиито решения съдържат елементи от решенията на задачите от $\mathbf{K_1^{(j)}, j=\overline{1,m}}$ т. е. решаването им се свежда до решаване на геометрични задачи.

По принцип всеки от класовете $\mathbf{K_i^{(j)}, i=\overline{2,n}, j=\overline{1,m-1}}$ е граф- структура по отношение на $\mathbf{K_i^{(j)}, (j=\overline{1,m-1})}$. Някои от класовете $\mathbf{K_i^{(j)}, i=\overline{2,n}, j=\overline{1,m-1}}$ могат да бъдат празни.



Фиг. 3. Граф-структура на кой да е клас задачи.

$K_i^{(j)}, j=\overline{1,m}$ \ $K_i^{(j)}, i=\overline{1,n}$	$K_i^{(1)}$	$K_i^{(2)}$	...	$K_i^{(m)}$
$K_1^{(j)}$	$K_1^{(1)}$	$K_1^{(2)}$	...	$K_1^{(m)}$
$K_2^{(j)}$	$K_2^{(1)}$	$K_2^{(2)}$	...	$K_2^{(m)}$
...	...	...	...	...
$K_n^{(j)}$	$K_n^{(1)}$	$K_n^{(2)}$	...	$K_n^{(m)}$

Фиг. 4. Матрица от класове задачи, които образуват система по отношение на $\mathbf{K_1^{(j)}, (j=\overline{1,m})}$

Задачите от класовете $K_i^{(m)}$, $i=\overline{2,n-1}$ се свеждат до $K_1^{(m)}$ (респективно $K_1^{(j)}, j=\overline{1,m-1}$) и образуват система както по отношение на тези класове, така и по отношение на класовете от съответния ред. Например: $K_2^{(m)}$ (аналогично и за $K_i^{(m)}$, $i=\overline{3,n}$) образува система, както по отношение на $K_1^{(1)}$, $K_1^{(2)}$,... $K_1^{(m)}$ така и по отношение на $K_2^{(1)}$, $K_2^{(2)}$,... $K_2^{(m-1)}$. Освен това всеки от класовете $K_i^{(j)}$ може да се запише със зависимостта $K_i^{(j)} = f(K_1^{(j)})$, $i=\overline{2,n}$, $j=\overline{1,m}$, където f в случая показва използването на геометричния подход, а в общия случай може да означава аритметичен подход, алгебричен подход и т. н.

По този начин се създава система от класове задачи въз основа на **математически методи за класификация**[4], чрез които учениците, търсещи творчески постижения усъвършенстват своите знания и умения и упражняват рефлексивни дейности и в резултат на това обогатяват своя творчески потенциал.

Предвидените при решаването на класовете задачи нагледно практически дейности в областта на геометричните модели при използването на съвременни информационни технологии са основа за създаване на конкретни механизми на мислене. Подобна технология на обучение позволява на учениците с изявени способности по математика да действуват от позицията на активен субект.

Особеностите на продуктивните дейности при решаване на задачи удовлетворяват някои феноменологични характеристики на рефлексията като подбор или конструиране на познавателна схема, която отговаря на придобития опит, способност опознатата познавателна схема "да се обективира в различни кодове", като си съхрани "инвариантната" ѝ структура" ([4] , с. 33)

3. Теоретични обобщения

Теоретичните обобщения могат да стават въз основа на така наречения метод на трансформациите.

Нека допуснем, че съществува, например $\triangle ABC$ (може да работим и с друг геометричен обект - четириъгълник, успоредник, тетраедър и т. н.) с елементи a,b,c,p,r,R,S,.... Може да се конструира $\triangle A'B'C'$ с елементи a',b',c',p',r',R',S',..., които са функции на a,b,c,p,r,R,S,....([10],[11],[17],[18]).

Нека сега разгледаме, например, неравенството (може да се работи и с други математически понятия):

(1) $I(a,b,c,p,r,R,S,...) \geq 0$

Ако (1) е вярно, то може да се докаже, че е вярно и неравенството

(2) I (a',b',c',p',r',R',S',...), ≥ 0 ($I_t > 0$) [11], където a',b',c',p',r',R',S',..., имат посочено по горе значение.

Тогава, действието, при което от неравенството (1) се получава неравенството (2) се нарича трансформация Т.

Неравенството (2) се нарича дуално на неравенството (1) по отношение на трансформацията Т.

На базата на въведеното понятие трансформация се стига до редица по-общи твърдения. Например, ако в $\triangle$ABC е вписана окръжност, която се допира до страните му AB, BC и CA съответно в точките C', A', B', то от съществуването на $\triangle$A'B'C' следва съществуването и на триъгълници подобни на него. На тази база може да се докаже, например, твърдението:

T_1 Ако съществува $\triangle$ABC с елементи a,b,c,p,r,R,S,ha......, то съществува и $\triangle$M'N'P' с елементи a',b',c',p',r',R',S',ha'......., удовлетворяващи формулите:

$$(3) \qquad a = \sqrt{a(p-a)}\ ,\ r = \frac{S}{\sum \sqrt{p(p-a)}}\ ,\ R' = \sqrt{Rr}\ ,\ S' = \frac{S}{2}\ ,\ h_a' = \frac{S}{\sqrt{a(p-a)}}\ , \ldots$$

Наистина $\triangle$M'N'P' е подобен на $\triangle$MNP , с коефициент на подобие $K = \sqrt{\frac{R}{r}}$, чийто върхове са допирни точки на вписаната в $\triangle$ABC окръжност и дължините на неговите страни се изразяват с формулите (3). Много често трансформацията, съответстваща на това твърдение се нарича T_1 ([11]. с. 13-15).

Посоченото твърдение, от друга страна, води до твърдението T_2: Ако е вярно неравенството:

I (a,....,r,R,S,ha,......) ≥ 0, то е вярно и дуалното му неравенство

I (a',....,r',R',S',ha',......) ≥ 0, в което елементите a',…,r',R',S',ha',…се получават по формулите (3).

T3: От съществуването на T_l следва съществуването на T_l^{-1} (обратна на T_l ([11] с.15-16, [17], с.108-109).

Наистина трансформацията T_l^{-1} може да се получи по геометричен път чрез така наречения педален $\triangle A_1B_1C^5{}_1$ на дадения $\triangle$ABC и неговия подобен $\triangle$A'B'C' с коефициент на подобие $K = \frac{2R}{d}$,R - радиус на описаната около $\triangle$ABC окръжност, $d^2 = p^2 - (2r+R)^2 > 0$, чийто дължини на страните удовлетворяват формулите:

$$(4)\qquad a' = \frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{4Sb},\ r' = d,\ R' = \frac{R^2}{d^2},\ S' = 2S,\ p' = \frac{2S}{d},\ \ldots$$

Доказва се, че формулите (4) са верни само за остроъгълен триъгълник ([2], с.17–24).

Друго по-общо твърдение е Т4: от съществуването на Т следва съществуването на T_W (обобщена трансформация).

Следователно в T_4 се твърди, че ако съществува $\triangle ABC$ с елементи a,...,S,..., то съществува и $\triangle A'B'C'$ с елементи ([2], с.18–19):

$$(5)\qquad a' = \sqrt{a(w+1)p-a},\ldots,\quad S' = \frac{S}{2}\sqrt{4w(w+1)\frac{R}{r}+(w-1)^2},\ldots,\quad w \geq 0$$ е произволно число.

Това пък води също до следното общо твърдение

T_5: Ако в $\triangle ABC$ е вписана окръжност, която се допира до страните BC = a, CA = в, AB = c съответно в точки M,N,P то ако AP = $x \geq 0$, BP = $y \geq 0$, CM = $z \geq 0$ необходимото и достатъчно условие да съществува триъгълник с дължини на страните a, b, c е да съществуват трите числа $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, удовлетворяващи равенствата:

(6) $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$ или

(7) $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$, p – полупериметър на $\triangle ABC$

Ясно е, че чрез равенствата (7) произволно алгебрично неравенство (може да се работи и с други математически понятия) за положителните числа x,y,z може да се трансформира в дуално на него геометрично неравенство (6) за дължините на страните a,в,c на произволен триъгълник.

Също ясно, е че в процеса на решаване на посочените на фиг.3 класове задачи може да се стигне до редица обобщения от такъв вид. Например, твърде интересни теоретични обобщения има за така наречената медианно-дуална трансформация ([11],[18]). Теоретичните обобщения се отнасят по принцип за комбинации от такива трансформации.

Особен интерес представляват и трансформациите, свързани с други геометрични фигури или по-общо трансформации, свързани с различни математически понятия.

Всъщност методът на трансформациите позволява решаването на даден проблем да се сведе до нов, по-лесно решим.

Теоретичните обобщения позволяват да се решават нови класове задачи (фиг. 1, 2) обикновено след тест С и да се правят нови теоретични обобщения и на тази база да се търсят нови технологични решения за субект-субектното разгръщане в процеса на обучението по математика на учениците с творчески постижения. А подобна позиция води до формиране на рефлексивно мислене у обучаваните.

Имайки предвид, че рефлексията е не само характеристика на теоретичното мислене, а и способ за самоизменение и развитие на личността върху конкретна технология, в разработката се предлага примерно приложение от някои класове задачи, които образуват система по отношение на други класове задачи. В основата им стои понятието задача-компонента [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложената технология за рефлексивно обучение осигурява технологично решение за субект-субектното разгръщане в процеса на решаване на геометрични задачи, за центриране на това обучение към личността на изявените ученици:

*да се провокира съобразителността и досетливостта в процеса на творческите постижения (интелектуална рефлексия);

*на базата на казаното по-горе да се провокира формирането на някои личностни качества на учениците (личностна рефлексия) с изявени интереси;

*да се потърси технологичен вариант, който по успешно да реализира диагностичните цели в обучението по геометрия (праксиологическа рефлексия).

Разглежданата проблематика показва, че задачите по геометрия крият в себе си богати възможности за формиране на рефлексия у учащите се. Оказва се, че системите от геометрични задачи могат да се разглеждат като дидактически конструкти, при които се изисква осъзната дейност, положително субективно отношение към операционализиране на знанията по геометрия, творческият им пренос в практиката и отново в теорията. Освен това съвременните информационни технологии намират най-добра реализация в геометричните модели, тъй като тяхна иманентна същност са конструктивните дейности, реализацията на които е насочена към моделиране на познавателни ситуации, активизиращи рефлексията.

Предложеният концептуален модел дава възможност за оптимизиране на субективната активност, изразяваща се в самооценка, саморегулация и самоусъвършенстване.

Овладяването на знания чрез творчески постижения е всъщност активизиране на интелектуалната (респективно личностната) рефлексия.

Следователно посоченото обучение е ориентирано към саморазвитие на личността, към информиране на нейната самоактивност, към самоорганизация, саморегулация, самоконтрол и самооценка.

Субективната активност на индивида в процеса на обучение изисква:

*технологично обучение, в основата на което стои творческата самостоятелност, а не пасивно копиране на образци;

*методи и форми на обучение, които да го превръщат в субект на собствената му дейност;

*механизъм за формиране на рефлексивна активност, търсене на взаимодействие между логически същественото и личностно-значимото.

БЕЛЕЖКИ

[1] [Под клас от задачи разбираме множество от задачи, обхващащи определени зависимости. Например: клас от геометрични задачи, клас от алгебрични задачи и т. н. Класовете от задачи могат да имат и по-малък обем — виж формулите (1), (2) ... (n).]

[2] Нека са дадени две задачи X_1 и X_2, съответно с решения Y_1 и Y_2. Ако решението Y_1 на задачата X_1 се съдържа в решението Y_2 на задачата X_2 при определени условия, то задачата X_1 се нарича задача компонента на задачата X_2 [3].

[3] E_i-i —мерно евклидово пространство.

[4] Матрицата от фиг. 4 има свойството, че всеки клас $K_i^{(j)}$, $i=\overline{2,n}$, $j=\overline{1, m-1}$ може да се представи по посочения на фиг. 3 начин. В разработката за посочената фигура 3 въвеждаме наименованието граф-структура.

Тези методи позволяват да се генерират класове от задачи чрез съществуващите вече информационни технологии и казаното по-горе.

[5] $\triangle A_1B_1C_1$ има за върхове петите A_1, B_1, C_1, на височините на $\triangle ABC$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Билчев, С. Й. и др.* Един метод за доказване на геометрични неравенства чрез алгебрични и обратно. - Математика, 1987, № 2, 13-18.

2. *Великова, Е. И др.* Обобщение на една специална трансформация за триъгълника и някои нейни приложения. Обучението по математика и информатика, 1991, № 5, 17-24.

3. *Ганчев, И.* За математическите задачи. С., 1976, с. 129.

4. *Гергиева, М.* Рефлексията в обучението по математика в V - VI клас. В. Търново, 2001, с. 199.

5. *Десев, Л.* Речник по философия. С., 1999, с. 719.

6. *Зарецкий, В. К., И. Н. Семенов, С. Ю. Степанов.* Рефлексивно-личностный аспект формирования решения творческих задач. - Вопросы психологии, 1980, № 5.

7. *Паспаланов, И. Г., Д. А. Щетински.* Конструиране и валидизация на българска скала за потребност от постижение. Годишник на СУ. Т. 78, 1985.

8. *Пирьов, Г. Д.* (1981). Психологията на творчеството като наука. Психология на творчеството. С., Наука и изкуство, 1981.

9. *Стамболиев, С.* Рефлексия, рефлексивни действия и тяхното формиране в учебния процес. - Педагогика, 1996, № 7, с. 3-12.

10. *Bilchev, Sv., E. A. Velikova.* The Teaching of Transformations for Solving Competitional Problems as a Route Towards. Higher Mathematics, Mathematics Competitions, Journal of the World Federation of National Mathematics Competitions, Canberra, Australia, vol. 6, № 2, December 1993, pp. 45-52.

11. *Bilchev, Sv., E. Velikova.* Transformations for a triangle and some applications. Mathematics and Education in Mathematics. Proceedings of the Seventeenth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians. Sunny Beach, April, 6-9, 1988, S., Bulgarian Academy of Sciences, (Plenary report), 1988, pp. 9-19.

12. *Bilchev, Sv., P. Vlamos.* Vector Models Method with Applications Excellence in Education. Greek Mathematical Society. Athens, 2002, p. 98

13. *Velikova, E. A., Sv. Bilchev.* The Method of Transformations for Solving Trigonometric and Mixed Inequalities, Geometry and Mathematics Competitions, Isfahan University of Technology, Iran, 1998, pp. 106-117.

14. *Velikova, E., Sv. Bilchev, P. Vlamos.* Oxford's Lectures, Excellence in Education. Greek Mathematical Society, Athens, 2002, p. 140.

15. *Mitrinovic, D. C. and Others.* Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1989, p. 710, c. 26-27.

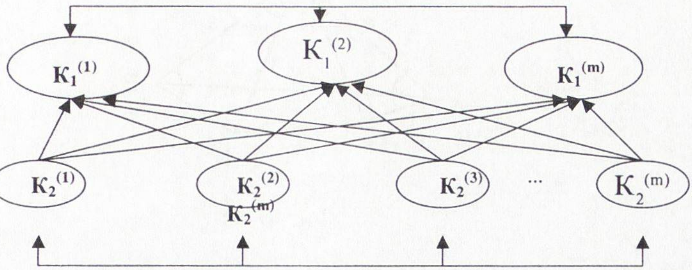
16. *O'Brien, G. E.* (1989). Personality traits of highly ability students choosing one among three different learning environments, Psychological reports, v. 65, № 1.

17. *Rabinowitz, S.* On the Computer Solution of Symmetric Homogeneous Triangle Inequalities, Proceeding of the ACM SIGSAM, International Symposium on Symbolic and algebraic Computation (ISSAC'89), 1989, pp. 272-286, c. 279-280.

18. *Urban, K. K.* (1990) Recent trends in creativity research and theory in Western Europe, European Journal for High Ability, v. 1, № 0.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Нека резгледаме само класове задачи от I и II ред. Връзките между тях са дадени на фиг. 4.



Фиг. 4. Граф-структура на първите два реда от класови задачи.

В това приложение ще посочим система от задачи в класовете $К_2^{(2)}$, $К_2^{(3)}$ по отношение само на $К_1^{(m)}$.

$К_1^{(m)}$: Клас от смесени геометрични задачи, които образуват система по отношение на класовете $К_1^{(j)}$, $j = \overline{1,m-1}$.

На системата по отношение на $К_1^{(j)}$, $j = \overline{1,m-1}$ няма да се спираме, а ще посочим само няколко задачи от класа $К_1^{(m)}$.

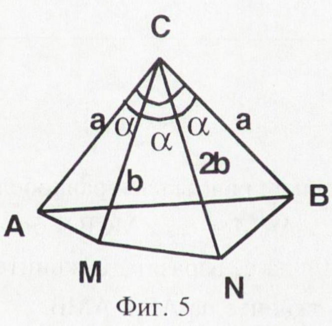
1-ва задача. Даден е равнобедрен правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90$) с дължина на катета a. Нека $\angle ACM = \angle MCN = \angle NCB = \alpha$, $CM = b$, $CN = 2b$ (фиг. 5).

1) Да се изразят AM, MN,BN чрез а,в и α.

2) Да се намери най-късото разстояние между точките А и В.

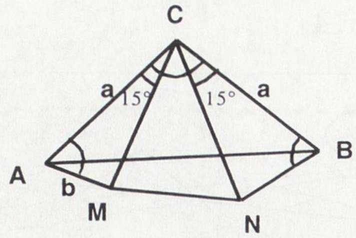
3) Да се изрази дължината на линията AMNB чрез а,в,α.

4) Да се сравнят дължините на AB и AMNB.



Фиг. 5

2-ра задача: Даден е $\angle ABC = 90°$), $\angle ACM = \angle NCB = 15°$, $\angle CAM = \angle NBC = 90°$, CA=CB=a, AM=b (фиг. 6).



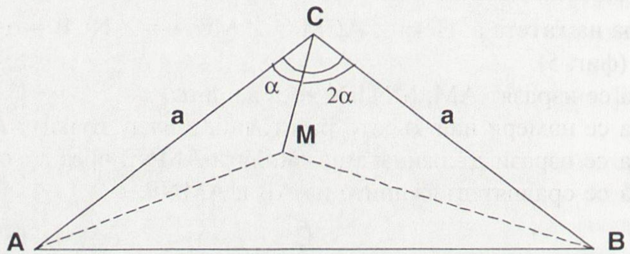
Фиг. 6

1) Да се сравнят дължините на AB и AMNB.

2) Да се намерят лицата на $\triangle MNC$ и четириъгълника AMNB.

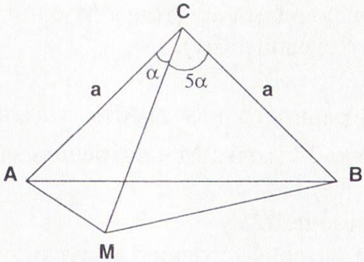
3-та задача. Даден е провоъгълен равнобедрен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) с дължина на катета a. $\angle ACM = \alpha$ $\angle MCB = 2\alpha$, $CM = x > 0$ (фиг. 7).

1. Да се изразят дължините на AM и BM чрез α и x.
2. Да се сравнят дължините на AB и AMB.



фиг. 7

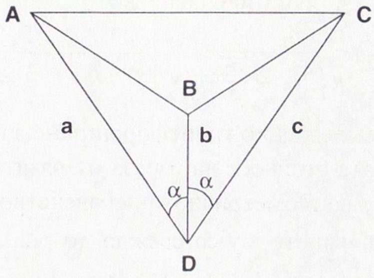
4-та задача: Даден е правоъгълен равнобедрен $\triangle ABC$ ($C = 90°$) с дължина на катета a. $\angle ACM = \alpha$, $\angle MCB = 5\alpha$ - фиг. 8. Ако $CM = x > 0$ (респективно $x\sqrt{2} > 0$) да се изразят дължините на AM и BM чрез α и x и да се сравнят дължините на AB и AMB.



Фиг.8

5-та задача. Даден е четириъгълник АВСД - фиг. 9, $\angle ADB = \alpha$, $\angle BDC = \alpha$, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$.

Да се сравнят дължините на АС и АВС.



Фиг. 9

6-та задача. Дадена е системата

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$

$\mathrm{tg}(\chi+\beta)=\mathrm{tg}(\chi-\beta)$

$\mathrm{tg}(\alpha+\chi)=\mathrm{tg}(\alpha-\chi)$

Да се определят α,β,χ.

7-ма задача. Да се определят тангенсите на x,y и z от уравненията $\mathrm{tg}x:\mathrm{tg}y:\mathrm{tg}z=a:b:c$, ако $x+y+z=180°$ и $a>0$, $b>0$, $c>0$.

8-ма задача. Даден е равностранен $\triangle ABC$. Да се докаже, че сборът от разстоянията на коя да е точка М до страните му е равен на дължината на височината му (точка M е вътрешна за $\triangle ABC$ или лежи върху някоя от страните му).

9-та задача. В равностранен $\triangle ABC$ с дължина на страната 1, разстоянията от точка M (точка M е вътрешна за $\triangle ABC$) до страните му са а,в,с.

1) Да се намери лицето му.

2) Да се докаже, че за разстоянията x,y,z от точка M до върховете на триъгълника има точно едно решение.

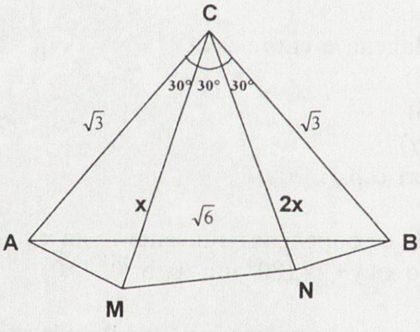
10-та задача. В $\triangle ABC$ са дадени височините с дължини h_a, h_b и h_c. Да се намерят дължините на страните му.

*$K_2^{(2)}$.Неравенства ([12],[18]).

1-ва задача. Да се реши неравенството

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + x\sqrt{5 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4x^2 - 6x + 3} \geq \sqrt{6}, \forall x > 0$$

Решаването ѝ се свежда до трансформиране в геометрична задача. Намира се най-малката стойност на израза от лявата страна на неравенството, като се използва геометричното неравенство AM+MN+NB $\geq$ $\sqrt{AB} = \sqrt{6}$, т. е. решаването му се свежда до решаването на задача 1 (при b = x, a = $\sqrt{3}$, α = 30°) от $K_1^{(m)}$ (фиг. 10).



$$AM = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$$

$$MN = x\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$$

$$NB = \sqrt{4x^2 - 6x + 3}$$

Фиг. 10. Геометрична конструкция за решаване на задача 1

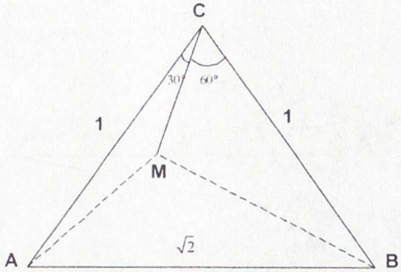
2-ра задача. Да се реши неравенството :

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1} \geqq \sqrt{2} \quad \forall x>0$$

Решаването му се свежда до решаването на задача 3 от $К_1^{(m)}$ (при a = 1, $\alpha = 30°$). Разглежда се правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), AC = BC = 1 (фиг. 11). Търси се права през върха C, която дели $\angle ACB$ на 30° и 60°. Избира се точка M, така че CM = x>0. Използва се AM+MB $\geq$ AB.

$$AM=\sqrt{x^2-x\sqrt{3}+1}$$

$$BM=\sqrt{x^2-x+1}$$

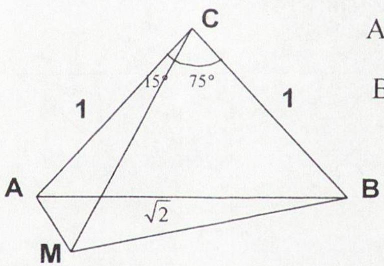


Фиг. 11. Геометрична конструкция за решаване на задача 2

3-та задача. Да се реши неравенството:

$$\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}+1)x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1} \geq \sqrt{2}, \forall x>0$$

Решаването му се свежда до решаването на задача 4 от $К_1^{(m)}$ при α = 15°, a = 1, CM = $x\sqrt{2}$ (фиг. 12)



$$AM=\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}+1)x+1}$$

$$BM=\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}$$

Фиг. 12. Геометрична конструкция за решаване на задача 3

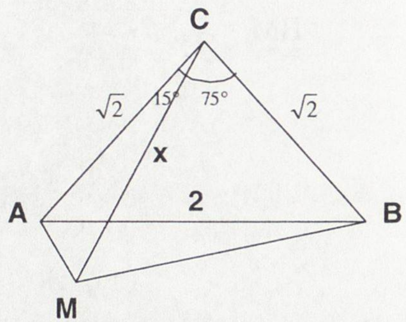
4-та задача. Да се реши неравенството:

$$\sqrt{x^2-(\sqrt{3}+1)x+2}+\sqrt{x^2-(\sqrt{3}-1)x+2}\geq 2, \forall x>0$$

Решаването му също се свежда до решаването на задача 4 от $K_1^{(m)}$ при $\alpha = 15°$, a = $\sqrt{2}$, CM = x (фиг. 13)

$$AM=\sqrt{x^2-(\sqrt{3}+1)x+2}$$

$$BM=\sqrt{x^2-(\sqrt{3}-1)x+2}$$

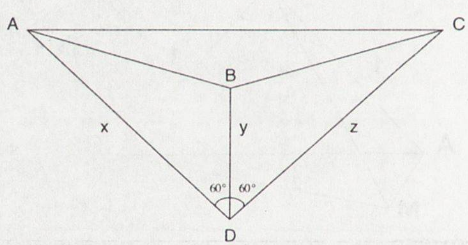


Фиг. 13. Геометрична конструкция за решаване на задача 4

5-та задача. Ако x y и z са произволни положителни числа, да се докаже неравенството:

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}\geq\sqrt{x^2+xz+z^2}$$

Решаването му се свежда до решаването на задача 5 от $K_1^{(m)}$ при $\alpha = 60°$, a = x, c = z (фиг. 14).



Фиг. 14. Геометрична конструкция за решаване на задача 5

*$K_2^{(3)}$.Системи уравнения ([12],[18])

1-ва задача. Нека а,в и с са положителни числа, за които:

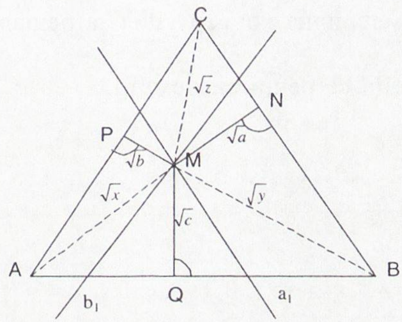
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Докажете, че системата има точно едно решение при x>0, y>0, z>0.

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}=1\\ \sqrt{z-b}+\sqrt{x-b}=1\\ \sqrt{x-c}+\sqrt{y-c}=1\end{array}\right.$$

Решаването ѝ се свежда до решаването на задача 8 и 9 от $K_1^{(m)}$, т. е. до построяване на равностранен △ABC с дължина на страната 1 (фиг. 15), в резултат на което системата се свежда до решаването на системата:

$$\left|\begin{array}{l}BN+NC=1\\ CP+PA=1\\ AQ+QB=1,\end{array}\right. \quad \text{имаща точно едно решение} \quad \left|\begin{array}{l}x=AM^2\\ y=BM^2\\ z=CM^2.\end{array}\right.$$



Фиг. 15. Геометрична конструкция за решаване на задача 1

2-ра задача. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l}x=\sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2}\\ y=\sqrt{z^2-b^2}+\sqrt{x^2-a^2}\\ z=\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}\end{array}\right. \qquad \text{при } x>0,\ y>0,\ z>0.$$

Решаването ѝ се свежда да решаването на задача 10 от $K_1^{(m)}$ – фиг. 16

BC=x, CA=y, AB=z

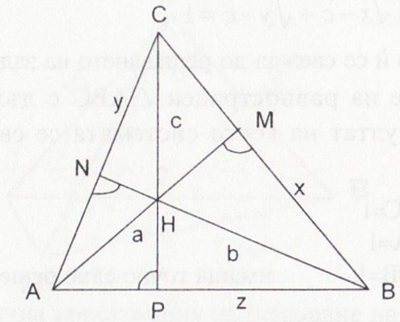
AM=a, BN=b, CP=c

CM=$\sqrt{y^2-a^2}$, BM=$\sqrt{z^2-a^2}$

AN=$\sqrt{z^2-b^2}$, NC=$\sqrt{x^2-b^2}$

AP=$\sqrt{y^2-c^2}$, BP=$\sqrt{x^2-c^2}$

X=BM+MC, Y=AN+NC, Z=AP+PB



Фиг. 16. Геометрична конструкция за решаване на задача 2

3-та задача. Да се реши системата:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{1-xy}=c \\ \dfrac{y+z}{1-yz}=a \\ \dfrac{z+x}{1-zx}=b, \end{cases}$$ където a>0, b>0, c>0.

Решаването ѝ се свежда да решаването на задача 6 от $K_1^{(m)}$ при α-β = δ_c, χ-β = δ_a, α-χ = δ_b.

Прави се трансформацията:

$$x=tg\alpha,\ y=tg\beta,\ z=tg\chi,\ c=tg\delta_c,\ b=tg\delta_b,\ a=tg\delta_a$$

От $\dfrac{x+y}{1-xy}=c \Rightarrow \dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha.tg\beta}=tg\delta_c, m.e. tg(\alpha+\beta)=tg\delta_c \Rightarrow (1)\alpha+\beta=\delta_c+k\pi$

Аналогично от другите две уравнения на системата се получават равенства:

$$(2)\ \beta + \chi = \delta_a + k_a.\pi$$

$$(3)\ \chi + \alpha = \delta_b + k_b.\pi$$

От получените равенства (1), (2) и (3) се получава:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\left[-\delta_a + \delta_c + \delta_b + \left(-k_c + k_c + k_b\right)\pi\right]$$

$$\delta_a = arctga, \ldots \delta_b = arctgb, \ldots \delta_c = arctgc$$

Аналогични изрази се получават за β и χ.

REFLEXION AND CREATIVE ACHIEVEMENTS OF STUDENTS GOOD AT MATHEMATICS WHEN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

MARGA GEORGIEVA, IVAN GANCHEV

Summary

The stimulation of creative achievements with students who have a marked interest in the sphere of geometry is connected not only with obtaining information about the objective world and the interesting applications for solving problems of life, but above all with forming adequate reflexion concerning their corresponding cognitive processes, ensuring adequate self-regulation in every activity in the indicated spheres and therefore their turning into subjects of their own activity.

In this paper reflexion is regarded as a basic phenomenon of the inward activity of people.

In spite oh the creative interpretations there still are "blanks" in geometry.

– reflexion is not regarded as a leading activity in solving geometric problems;

– the attention is not turnet to the interiorization of the actions;

– reflexion and reflexive actions are not regarded as specific "new formations", raising to a higher level the intellectual development of the students when solving geometric problems (intellectual reflexion).

In this paper the elimination of these "blanks" in the tuition of students with marked interests (a need for creative achievements) in the sphere of geometry is connected with the conceptual model of reflexive tuition which is shown below (fig. 1).

In this paper the accent is on classes of concrete geometric problems, their generalization and deducing general theoretical principles, reflexive control and evaluation which are connected with a verification of the correspondence between the available methods of action and the changing conditions when solving geometric problems.

The reasoning is based on the preparation for Olympiads in mathematics with an accent on the geometric approach for solving certain classes of problems.

First stage:

- a test for creative achievements generally in the sphere of mathematics within the framework of the existing tuition in accordance with the present standards (test A_1), whose questions form a system of classes of problems;

- a test for creative achievements above the school standard in the sphere of mathematics (test A_2), whose questions form a system of classes of problems.

Second stage:

- a test for creative achievements in the sphere of geometry above the school standard (test B), whose questions form a system of classes of problems.

This stage can be reached after:

- a comment on the course of solving problems from different concrete classes of geometric problems;

- theoretical generalizations above solving the problems from these more general classes through reducing them to concrete and more general geometric problems;

- a comparative analysis for ascertaining how similar and different the ways of solving them are and on this basis grouping together the problrms in more general classes.

Third stage:

- application of the theoretical generalizations concerning solving the unfamiliar problems through geometric models (new systems of classes of problems, test C).

Thus we arrive at a new modern interpretation of generalization in geometry, analysed not only as a mental operation but as an important reflexive action in forming a heuristic transfer in the intellectual processes when applying the geometric knowledge.

The problems treated here give a new value orientation to the students (the socalled personality reflexion), connected with the overall development of the individual.

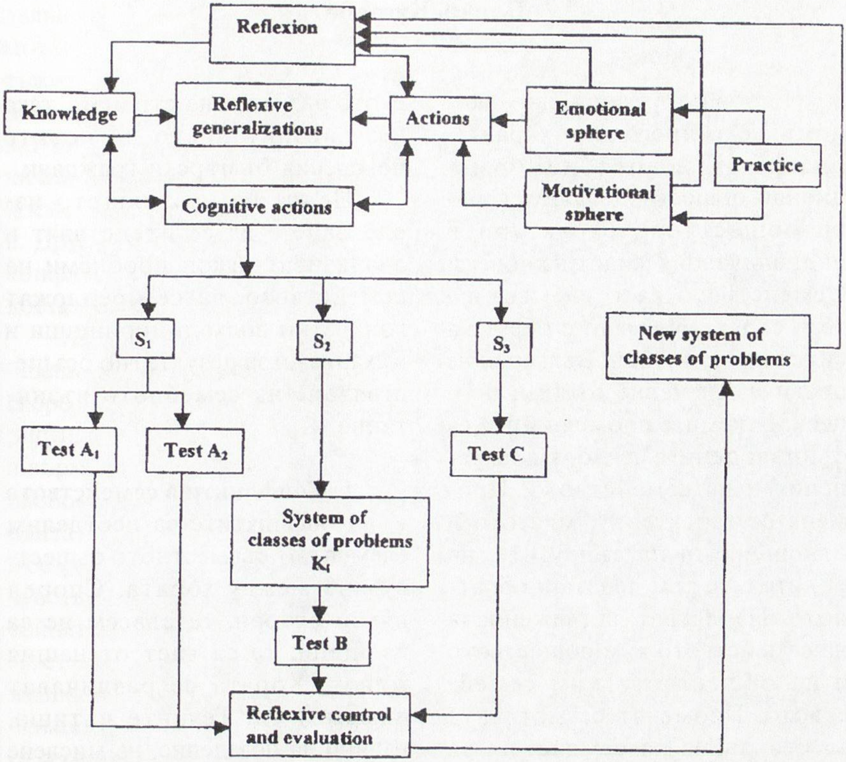


Fig. 1. A conceptual model of reflexive tuition

S_j - stages of reflexive tuition (j = 1, 2, 3)

K_i - classes of concrete problems