УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ. РАЗСЪЖДЕНИЯТА ПО ИНДУКЦИЯ, ДЕДУКЦИЯ И АНАЛОГИЯ В НАЧАЛНОТО ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

Иванка Минчева, Маринела Михова

В студията се разглеждат някои особености при използване на елементи от логиката в началното обучение по математика. Специално внимание се отделя на разсъжденията по индукция, дедукция и аналогия. Теоретичните идеи са илюстрирани с разнообразни примери от началния училищен курс по математика.

Умозаключенията са средства, чрез които от едни съждения с определена връзка между тях, се получават нови съждения, съдържащи в явен вид нова информация в сравнение с първите. Изходните съждения в умозаключенията се наричат предпоставки, а получените съждения се наричат заключения (изводи). Тъй като чрез умозаключенията от едни съждения се получават други с помощта на разсъждения, казва се още, че те са методи на разсъждение (4).

Умозаключенията в обучението по математика в началните класове

Понятието математическо твърдение, което е по същество теорема или аксиома, явно се въвежда в седми клас. В неявна форма, обаче, то се използва и в обучението по математика в началните класове. Твърденията в началния училищен курс по математика са изказани в условна или категорична форма. Например твърдението "Ако разменим местата на събираемите, сборът не се променя." е изказано в условна форма, а твърдението "С числото нула не може да се дели." – в категорична форма.

Прието е в началното обучение по математика математическите съждения и умозаключения да се наричат математически твърдения или само твърдения.

В обучението по математика логическото мислене се проявява преди всичко в умозаключенията по индукция, дедукция и аналогия, до които се достига чрез разсъждения по съответните схеми. Тези разсъждения от своя страна дават информация, която е зад границите на непосредственото възприятие.

Проблемът за математическите твърдения и умозаключения е теоретично разработен от руските методици Юрий Колягин (7) и Никита Метелски (9), от българския математик и методик Иван Ганчев (4) и от американския математик Дьорд Пойа (13). При разглеждане на този проблем обикновено има терминологична неяснота по отношение на понятията индукция – индуктивен подход – индуктивно умозаключение (умозаключение по индукция), дедукция – дедуктивен подход – дедуктивно умозаключение (умозаключение по дедукция) и аналогия – традуктивен подход – традуктивно умозаключение (умозаключение по аналогия). Ето защо тук ще разглеждаме гореспоменатата система от понятия в следните аспекти:

1. Индукция, дедукция, аналогия като познавателни методи, които се конкретизират в мисловните дейности анализ, сравнение, синтез, абстрахиране, обобщение, моделиране, формализация и в аксиоматичния метод и метода на сходството.

2. Индуктивен подход, дедуктивен подход и традуктивен подход като начини за пристъпване към дейност, които се проявяват в две направления

а) като вид организация на познавателната дейност на учениците в обучението по математика;

б) като система на изложение на теоретични знания в учебниците и научната литература.

3. Индуктивни, дедуктивни и традуктивни умозаключения (умозаключения по индукция, дедукция или аналогия) като "основна форма на нашите мисли, при които от дадено едно или повече (прости или сложни) съждения се образува ново съждение, въз основа на определени логически правила" (10).

В настоящата разработка разглеждаме по-обстойно индуктивния, дедуктивния и традуктивния подход в смисъл 2а) и индуктивните, дедуктивните и традуктивни умозаключения в смисъл 3.

Индуктивно умозаключение. Индуктивният подход в обучението по математика в началните класове

При индуктивното умозаключение нашето мислене се движи от частното, единичното, особеното към общото, т.е. от определена степен на общност, ние достигаме до ново познание с по-голяма степен на общност.

Следователно индуктивно умозаключение се нарича това умозаключение, при което от няколко верни съждения за конкретни елементи от дадено множество A се получава ново съждение за всички елементи на A.

Достигането до индуктивно умозаключение се извършва по една от следните две схеми на индуктивни разсъждения:

$\{a_1, a_2, ..., a_к\} \subset A, \qquad \{a_1, a_2, ..., a_к\} \neq A$

a_1 притежава свойството P
a_2 притежава свойството P
…………………………………
$a_к$ притежава свойството P

Вероятно всеки елемент а О А притежава свойството Р.

Схема 2

$\{a_1, a_2, ..., a_к\} = A$

a_1 притежава свойството P
a_2 притежава свойството P
…………………………………
$a_к$ притежава свойството P

Сигурно е, че всеки елемент а О А притежава свойството Р.

Схема 3

Разсъжденията по схема 2 и схема 3 се наричат съответно разсъждения по непълна индукция и пълна индукция.

Поради неоперативното, конкретно-образно мислене на учениците в началните класове, усвояването на знанията по математика в повечето от случаите е свързано с индуктивни разсъждения.

Непълната индукция обикновено се прилага в съчетание с познавателните методи наблюдение, експериментиране, сравнение и обобщение. С тях чрез изучаване на отделни обекти от множеството А найнапред се откриват съжденията $P(a_1), P(a_2), ..., P(a_к)$, като експериментално се установява тяхната вярност и с обобщение се открива съждението $(\forall a \in) P(a)$, а чрез непълна индукция се прави извод за неговата *вярност* или п*равдоподобност*. Посочват се двете възможности, защото много често в ежедневието, както и в началното обучение по математика, негласно се приема, че така винаги се получават верни съждения (4).

Организирането на познавателната дейност на учениците трябва да е резултат от подбор и подреждане на такива методи на познание и методи на обучение, които конкретизират индуктивния подход в уроците по математика. Например при наблюдение, беседа, обяснение се използват методите на познание анализ, синтез, сравнение, обобщение и абстрахиране. Реализирането на индуктивния подход в обучението по математика преминава през следните етапи, съдържащи съответни дейности, характерни за индуктивните разсъждения:

1. В резултат на наблюдение и експеримент се забелязва се някакво сходство между отделните обекти или частни случаи (числа, равенства, неравенства, задачи, групи обекти и др.).

2. Сравняват се няколко обекта или частни случая.

3. Чрез обобщение се достига до извод за всички обекти или случаи, които се отнасят до разгледаната ситуация (принадлежат на множеството A).

Важно изискване при приложение на индуктивния подход в началното обучение по математика, е учениците самостоятелно да откриват сходството и разликата между обектите, да правят догадки, да изказват хипотези и да ги проверяват. Целта е след обобщение да се достигне до изказване на логически правилно и вярно умозаключение.

Въпреки известни несъвършенства, индуктивният подход намира голямо приложение в обучението по математика в началните класове в следните направления:

А) Изучаване на понятието число и изграждане редицата на естествените числа.

Пример 1. На първия етап от въвеждане на понятието число 3, на децата се предлагат различни конкретни множества – четири деца, четири топки, четири листа, четири кръгчета и т.н. Тези множества са всъщност елементите $a_1, a_2, ..., a_k$, а свойството P е “броят на елементите на множеството е 3”. В процеса на наблюдение се обръща внимание на разнообразни свойства както на елементите на всяко множество, така и на самите множества. Чрез беседа на следващия етап учениците откриват общото свойство P на всички множества. Целта е в съзнанието на децата да се закрепи броят на елементите във всяко множество, а именно че навсякъде елементите са били “по три”. Последния етап се състои в мислен експеримент, организиран от учителя, с насочващи въпроси и обяснение. Целта е децата да забележат, че свойството P – "да имат три елемента", изразено с думата "три" характеризира произволно множество от вида $\{a, в, c\}$.

Пример 2. Теоретична основа за изграждане редицата на естествените числа е релацията "непосредствено следва" в множеството N. За изясняване на тази релация се използват неравномощни множества от вида M и M $\cup$ E, където M е произволно крайно множество, а E е единичното множество (множество с един елемент). В резултат на наблюдение и беседа на първия етап учениците сравняват различни двойки неравномощни множества с по-малко от пет елемента, които са в посочената релация. Така се създава интуитивна основа за откриване на определена закономерност при прехода от едно число към следващото в редицата на естествените числа. След това се записват неравенствата, отразяващи връзката между числата, съответни на разгледаните множества – $0 < 1$, $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$, $4 < 5$ (тези неравенства са всъщност елементите a_1, a_2, ..., a_5). Откриването, записването и сравняването на посочените неравенства помага на учениците да достигнат до извода, че всяко следващо число е по-голямо от предходното или че всяко предходно число е по-малко от следващото. На тази основа, използвайки формулирания извод, чрез съзнателно броене и сравняване на неравномощни множества с повече от пет елемента и в процеса на беседа децата откриват, че и за числата от 5 до 10 са в сила аналогични неравенства и ги записват самостоятелно. На този етап представа за мястото на всяко от изучените числа в редицата на естествените числа, се изгражда с обобщаващия запис $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10$, без да се изисква строга формулировка на горепосочения извод. По-късно, при изучаване на другите групи числа и с повишено ниво на абстрактност, се изгражда редицата на естествените числа и се установява, че тя е безкрайна.

Б) Изучаване свойствата на аритметичните операции.

Пример 3. До правилата за умножение на число с нула и единица и събиране на число с нула, може да се достигне чрез решаване на задачи от вида:

Пресметнете и сравнете резултатите:

5.0 = ?7.1 = ?7 + 0 = ?

1.0 = ?8.1 = ?8 + 0 = ?

4.0 = ?9.1 = ?9 + 0 = ?

6.0 = ?6.1 = ?6 + 0 = ?

След сравняване на задачите от всяка колона и откриване на зависимостите между компонентите и резултатите на съответната аритметична операция, може да се формулират правилата за пресмятане на сбор на число с нула и на умножение на число с единица и след това тези случаи е добре да се обобщят и да се запишат символично:

$a.0 = 0.a = 0$

$a.1 = 1.a = a$

$a + 0 = 0 + a = a$

Пример 4. Решаване на задачи, свързани с откриване и използване на зависимостите между числата, участващи в тях, напр.:

Продължете колоната от равенства и направете проверка:

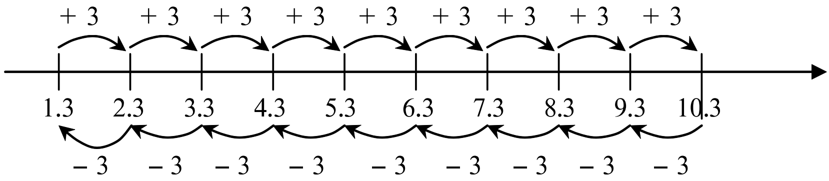
1.9 + 2 = 11
2.9 + 3 = 21
3.9+ 4 = 3n
n.9 + n = 4n
n.9 + n = 5n

В) Откриване и използване на аксиоматичната идея при изучаване на таблиците за умножение.

Табличните произведения от всяка таблица се пресмятат на теоретико-множествена основа чрез намиране броя на обекти групирани по равно, т.е. като се използва опита на децата за намиране на произведение на две числа като сбор на равни събираеми. След това след сравняване и подходящо записване на няколко двойки съседни таблични произведения (2.3, 3.3, 4.3) индуктивно се достига до аксиоматичната идея за намиране на всяко следващо произведение като сбор на предходното и на съответния множител на таблицата. Напр.:

1.3= 3 + 3 = 6
3.3 = 3 + 3 + 3 = 2.3 + 3 = 6 + 3 = 9
2.3
4.3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 3.3 + 3 = 9 + 3 = 12
3.3

Добре е тази идея да се представи чрез числов лъч и учениците да се насочват към нея, когато трябва да запаметят трайно или да възстановят забравено произведение. Ако напр. е забравено произведението 6.3 то може да се възстанови като се пресметне чрез събиране като към произведението 5.3 (то се помни по-лесно) се прибави 3. [11]



Г) Пропедевтика на елементи от алгебрата.

(1)Пропедевтика на понятията променлива, числов израз и алгебричен израз.

Анализиране на таблици от вида

а	267	496	508	765
в	154	238	395	142
а + *в*				

а	6	4	5	10
в	2	3	0	1
а . *в*				

по редове подготвят интуитивно разбирането на буквата като означение на произволно число, т.е. на достъпно ниво се въвежда понятието променлива. Пресмятането на изразите от третия ред е основа за пропедевтика на понятията алгебричен израз от вида *а* + *в* и *а* . *в* и числова стойност на алгебричен израз. Разглеждането на таблиците по колони е свързано с пресмятане стойността на числов израз.

(1) Въвеждане на понятието уравнение.

В обучението по математика в първи клас чрез решаване на групи задачи от вида 3 + n = 5, n – 2 = 3, 4 – n = 3, мисълта на учениците се насочва към съждението, че празното квадратче е общ символ на кое да е число от дадено множество и чрез опитване и проверка може да се открие това число, което превръща уравнението във вярно числово равенство. След наблюдение на достатъчен брой елементи от обема на понятието уравнение по-късно се въвежда обобщен запис на уравнение *7 + а = 23*, *а = ?*, без да се въвежда терминът на понятието.

(2) Пропедевтика на понятието функция.

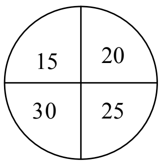
Пример 5. С помощта на индуктивни разсъждения се извеждат всички зависимости между изменението на компонентите и изменението на резулатаtите от аритметичните операции. Чрез решаване на задачи (за предпочитане представени в таблици) децата пресмятат, сравняват компонентите и резултатите и изказват съответното индуктивно умозаключение. Например след попълване на таблици от вида

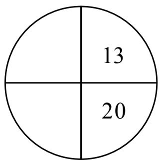
a	5	5	5	5	5
$в$	0	2	4	6	8
$a + в$					

a	4	8	16	32	64
$в$	3	3	3	3	3
$a\,.\,в$					

сравняване на събираемите и сбора и съответно множителите и произведението и с подходящи въпроси, учениците стигат до извода, че ако едното събираемо е постоянно число, а другото се увеличава с две, то и сборът се увеличава с две и съответно, ако единият множител е постоянен, а другият се увеличава два пъти, то и произведението се увеличава два пъти. Изведени по индуктивен път, тези умозаключения са основа за използване на устно смятане чрез закръгляне. За усъвършенстване знанията на учениците за зависимостите е добре те да се прилагат при решаване на задачи, в които трябва да се открие дадена зависимост и същата да се използва за допопълване на редица от числа, таблица, диаграма и др. Напр.: "Попълнете липсващите числа:" 4, 13, 22, 31, ...

a		5			
$в$	12	17	22		
$a + в$	17		27		





Пример 6. Решаването на задачи, в които се проследяват зависимости между изменението на компонентите и изменението на резултатите на аритметичните операции, са основа за пропедевтика на понятието функция. Например задачите, представени в таблиците:

а	3	3	3	3	3
в	4	6	8	10	12
а.в					

$\boxed{+3}$

0	
4	
5	
7	
6	

Задават съответно функцията $y = 3.x$ с дефиниционно множество числата от втория ред, а и функцията $y = x + 3$ с дефиниционно множество числата в първата колона. (11)

(1) Извеждане на правилата за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция.

Чрез системи задачи, отразяващи връзката между събиране и изваждане или умножение и деление се извеждат зависимостите съответно между събираемите и сбора и множителите и произведението. На тази основа се открива начина за намиране на неизвестно събираемо и неизвестен множител. Един вариант на система (последователност) от задачи за въвеждане за зависимостта между събираемите и сбора и множителите и произведението може да бъде следният:

2 + 3 = ?4 + 5 = ?1 + 9 = ?
5 – 3 = ?9 – 5 = ?10 – 9 = ?
5 – 2 = ?9 – 4 = ?10 – 1 = ?

2.3 = ?4.5 = ?1.9 = ?
6:3 = ?20:5 = ?9:9 = ?
6:2 = ?20:4 = ?9:1 = ?

след сравняване на задачите по тройки и задачите във всяка тройка задачи, индуктивно се достига до следните изводи:

Извод 1: Ако от сбора извадим едно от събираемите, получаваме другото събираемо.

Извод 2: Ако произведението разделим на един от множителите, получаваме другия множител.

(2)Изясняване на правилата за намиране сбор и разлика на подобни едночлени.

След решаване на задачи от вида

$4 + 4 + 4 = 3.4$

$a + a + a = 3.a$

$2.a = a + a$

$3.a = a + a + a$

$2.a + 3.a = a + a + a + a + a = 5.a$

чрез приложение на зананията на учениците за умножение на сбор с число, индуктивно се открива, че $2.a + 3.a = (2 + 3).a = 5.a$.

Д) Изучаване на геометрични обекти и изследване на техните свойства.

Пример 7. Въвеждане на понятието равностранен триъгълник.

След наблюдение на конкретни равностранни триъгълници, на учениците е добре да се постави задача да измерят и сравнят страните на всеки от тях. Резултатите от тези дейности е подходящо да се запишат в таблица от вида

AB	4 см	6 см	3 см	7 дм	8 мм	2 см
BC	4 см	6 см	3 см	7 дм	8 мм	2 см
CA	4 см	6 см	3 см	7 дм	8 мм	2 см

След беседа се открива общото свойство на всички разгледани триъгълници (че имат равни страни) и се достига до обобщение за вески триъгълник от този вид. Тъй като съществува смислова и логическа връзка между съдържанието и термина на понятието (равни страни – равностранен триъгълник), е добре тя да се посочва на учениците и така те откриват термина на новото понятие, запомнят го по-лесно и съзнателно го свързват със същественото свойство на равностранния триъгълник.

Използването на индуктивни разсъждения в началното обучение по математика трябва да отговаря на някои изисквания:

• При разсъждения по непълна индукция е възможно да се допуснат грешки от учениците, в резултат от използване на така наречената "слаба индукция", при която от един пример или от непредставителна група частни случаи се прави извод по индукция. За предотвратяване на грешки от този вид е полезно да се провокира мисленето на учениците с такива задачи и ситуации, които водят до грешни индуктивни умозаключения:

Задача 1. Сравнете изразите, намерете общото в получениете неравенства и формулирайте извод:

2 + 3 ... 2.3

3 + 4 ... 3.4

4 + 5 ... 4.5

5 + 6 ... 5.6 и т.н.

Направеният извод "Сборът на две последователни естествени числа е по-малък от тяхното произведение." е неверен, тъй като

0 + 1 > 0.1

1 + 2 > 1.2

Задача 2. Попълнете следната таблица и открийте зависимостта между сбора и събираемите.

събираемо	1	2	3	4	5
събираемо	4	4	4	4	4
сбор					

Очакваният извод "Сборът е по-голям от всяко от събираемите." се опровергава с подходящ подбор на контрапримери 1 + 0 = 1 и 2 + 0 = 2;

- Разсъжденията по схемата на "слаба индукция" дават възможност да се въвеждат математически знания, при които се появяват елементи на доказателство. В този случай индуктивните разсъждения се доближават до дедуктивните и са познати като представителен пример. Този вид разсъждения ще бъдат разгледани, когато се изяснява дедуктивният подход и свързаните с него дедуктивни умозаключения;
- Индуктивният подход трябва да се използва при откриването и изучаването на основни съждения, които са теоретична основа на учебното съдържание по математика – свойства на аритметични операции и свойства на изучаваните геометрични фигури;
- В изследванията и умозаключенията по индукция учениците трябва да участват активно като изказват отделни съждения, откриват сходството и разликата и изказват умозаключения;
- Тъй като по непълна индукция се достига се откриват истините като хипотези, а не се доказват, е необходимо да се посочват и други съображения за обосновка, които са достъпни за учениците и да се търси потвърждение в практиката.

От разгледаните примери от учебната практика по математика в началните класове се вижда, че индуктивният подход се реализира чрез няколко метода на познание. До отделните обекти – елементи на обема на понятие обект или понятие релация и до съждения за тях се достига чрез анализ. В процеса на наблюдение тези обекти се сравняват и след абстрахиране и обобщение се достига до някакво ново знание или извод. Специално в случаите, когато се стига до изказване на твърдение чрез разсъждения по непълна индукция (а тя преобладава в началното обучение по математика) в резултат от наблюдение на отделни частни случаи (съждения) се формулира индукционно предположение, което обикновено има връзка с опита, с фактите и с действителността. Това означава, че твърдението не е доказано, т.е. не може да претендира за истинност, то е само опит да се стигне до истината. Следователно след разсъждения по тази схема учениците стигат до точно формулиран общо твърдение, което може да се нарече "пробно твърдение". Истинността на това твърдение се засилва, ако то се потвърждава от нов частен случай. От друга страна, изводът, направен по пътя на непълна индукция, е необоснован, но за учениците в повечето случаи той е напълно достоверен, даже очевиден. Затова е целесъобразно учителят да предлага различни съображения за обосновка, чрез които да активизира мисловната дейност на учениците.

Независимо от някои недостатъци на непълната индукция, учебната практика и теоретичните изследвания показват, че тя е надеждно и полезно средство за достигане до нови знания и за убеждаване във верността на основни твърдения в началния училищен курс по математика. Предимствата на разсъжденията по индукция и на индуктивния подход могат да се систематизират както следва:

- Те съответстват на преобладаващото конкретно-образно мислене на учениците в начална училищна възраст;
- Използването на индуктивен подход дава възможност за активно участие на повече деца при въвеждане и опериране с математически знания и тяхното словесно или символично представяне. Т.е. разсъжденията по индукция създава реални възможности за активизиране на познавателната и творческа дейност на учениците;
- В индуктивния подход се реализира един от основните дидактически принципи – от просто към сложно, от лесно към трудно, от конкретно към абстрактно и от познато към непознато.

Дедуктивно умозаключение. Дедуктивният подход в обучението по математика в началните класове

Дедуктивното умозаключение е такава форма на мислене, при която от едни верни съждения се получават други верни съждения на основата на закони и правила за извод от логиката. *За разлика от индуктивните умозаключение, при дедуктивните движението на мисълта е от общото към частното, от умозаключение с определена степен на общност, към ново познание с по-малка степен на общност (А. Бънков, 1975, 268).*

Математиката е дедуктивна наука и именно дедуктивните разсъждения възпитават строгост, точност и лаконичност на мисленето. Ето защо задачата на обучението по математика за развитие на математическо мислене на учениците по същество е задача за развитие на дедуктивното мислене. Но, от друга страна, възрастовите особености на учениците от началните класове правят невъзможно използването на дедукцията в чист вид. Затова в началното обучение по математика се използват само някои елементи на дедукцията, като се прави пропедевтика в неявен вид на дедуктивно умозаключение чрез решаване на достъпни за учениците задачи от учебното съдържание.

В обучението по математика в началните класове дедуктивните разсъждения се извършват по една от следните схеми:

(1) $$\frac{(\forall x\ O\ M,\ P(x)),\ x_0 \in M}{P(x_0)}$$

(2) По правилата за извод:

$$\frac{p \to q,\ p}{q}$$

$$\frac{p \to q, щ\ q}{щ\ p}$$

Важна особеност на използване на дедуктивните разсъждения в начална училищна възраст е тяхната взаимна връзка с индуктивните. Случаите, в които се съдържат елементи на дедукция и в неявен вид на дедуктивен подход в началния училищен курс по математика, са следните:

А) Обосноваване на свойствата на аритметичните операции чрез съответните операции с множества като се използва представителен пример.

Пример 8. Разместителното свойство на сбора на две естествени числа се основава на разместителното свойство на обединението на множества, т.е. $A \cup B = B \cup A \Rightarrow а + в = в + а$, където $а$ и $в$ са равни съответно на броя на елементите на множествата А и В. Следователно решаването на задачата за въвеждане на това свойство, основана на представителен пример преминава през следните етапи:

- Обединение на две дадени множества като към елементите на условно приетото за второ множество към елементите на условно приетото за първо множество (намиране на обединението АИВ);
- Обединение на множествата като елементите на “първото множество” се присъединяват към елементите на “второто множество” (намиране на обединението ВИА);
- Установява се, че и в двата случая се получава едно и също множество и следователно и броят на техните елементи е един и същ.
- Използват се знанията на учениците за съдържанието на операцията събиране, а именно че броят на елементите на обединението на две множества е равен на сбора от броя на елементите на двете изходни множества и се намират $а + в$ и $в + а$;
- Достигане до равенствата $а + в = с$ и $в + а = с$;
- Обобщаване и записване на равенството $а + в = в + а$;
- Формулиране на свойството.

Горепосочените етапи се осъществяват в различни периоди от обучението и в последователност от уроци по математика.

Пример 9. Въвеждането на съдружителното свойство на сбора също е възможно да се извърши чрез представителен пример. Използването на представителен пример е основано на съдружителното свойство на обединение на множества, т.е. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \Rightarrow (а + в) + с = а + (в + с)$, където $а$, $в$ и $с$ са равни съответно на броя на елементите на А, В и С.

Решаването на задачата за въвеждане на съдружителното свойство преминава през етапи, аналогични на тези при разместителното свойство:

- Обединение на три дадени множества А, В и С като към обединението на А и В се присъединяват елементите на С (намиране на обединението $(A \cup B) \cup C$);
- Обединение на същите три множества като към А се присъединяват елементите на обединението на В и С (намиране на обединението $A \cup (B \cup C)$);

• Установява се, че и в двата случая се получава едно и също множество и следователно и броят на техните елементи е един и същ.

• Използват се знанията на учениците за съдържанието на операцията събиране и се намира броя на елементите на обединението във всеки от случаите: $(a + в) + c$ и $a + (в + c)$;

• Достигане до равенствата $(a + в) + c = d$ и $a + (в + c) = d$;

• Обобщаване и записване на равенството $(a + в) + c = a + (в + c)$;

• Достигане до следващо обобщение, че съдружителното свойство на събирането дава възможност да се намира сбор на повече от две събираеми и този сбор да се записва без скоби;

• Формулиране на свойството.

Б) Използване свойствата на аритметичните операции за рационални пресмятания.

Пример 10. Нека разгледаме следната задача: "Пресметнете по рационален начин сбора 7 + 8 + 3". При решаването ѝ чрез обяснение и беседа, учениците се насочват към разсъждения по схема (1), които преминават през следните етапи:

1. За всички естествени числа $a + в = в + a$ и $(a + в) + c = a + (в + c)$ (общо твърдение – $(\forall x \in M, P(x))$).

2. 7, 8 и 3 са естествени числа (частно твърдение – $x_0 \in M$).

3. Следователно за тях също са в сила тези свойства (ново частно твърдение – $P(x_0)$) и можем да ги приложим и да пресметнем рационално сбора, т.е. 7 + 8 + 3 = (7 + 3) + 8 = 10 + 8 = 18.

В) Определяне вида на даден математически обект.

Пример 11. При определяне вида на даден ъгъл, чрез беседа учителят насочва познавателната дейност на учениците към използване на дедуктивни разсъждения по схема (1), следвайки етапите:

1. Всеки ъгъл, по-малък от правия е остър (общо твърдение – $(\forall x\ O\ M, P(x))$.

2. Ъгъл АОВ е по-малък от правия ъгъл (частно твърдение – $x_0 \in M$).

3. Следователно ъгъл АОВ е остър (ново частно твърдение – $P(x_0)$).

Обикновено разсъжденията в случаи като този се извършват по схема (1) като се изказват второто и третото съждение, а първото се предполага, че присъства неявно в решаването на задачата.

Г) Логически разсъждения по правилата за извод (2).

Пример 12. Решаване на задачи, в които се прилага връзката между събиране и изваждане или между умножение и деление. Например:

Задача 1. Вярно ли е, че 48:6 = 7?

Задача 2. Вярно ли е, че 25 – 11 = 13?

Задача 3. Като знаете, че 15 + 3 = 18, намерете разликата 18 – 3.

Задача 4. Обосновете правилото, че с числото нула не може да се дели.

Схемите, по които се разсъждава при решаване на посочените задачи са съответно:

Задача 1:

1. Ако 48:6 = 7, то 7.6 = 48 (48:6 = 7 (p) $\rightarrow$ 7.6 = 48 (q)).
2. 7.6 № 48 ($\neg q$).
3. Следователно 48:6 № 7 ($\neg p$).

Разсъжденията при решаване на задача 2 се извършват по аналогична схема на тази при задача 1, но се използва връзката между събиране и изваждане.

Задача 3:

1. Ако 15 + 3 = 18, то 18 – 3 = 15 (15 + 3 = 18 (p) $\rightarrow$ 18 – 3 = 15 (q)).
2. По условие 15 + 3 = 18 (p).
3. Следователно 18 – 3 = 15 (q).

Задача 4: Чрез решаване на достъпни задачи, учениците могат да се насочат към разсъждения по второто правило за извод от правилата (2) (mod. tol.). Предлагат се различни задачи с делител 0. След предположенията за получените частни се извършват разсъждения по горепосочената логическа схема и се достига до противоречие. Напр. ако 5:0 = 5 то 5.0 = 5 (5:0 = 5 (p) $\rightarrow$ 5.0 = 5 (q)). Но от умножението с 0 е известно, че 5.0 = 0 ($\neg q$). Следователно предполагаемото частно не е вярно намерено, т.е 5:0 № 5 ($\neg p$). С аналогични разсъждения се стига до противоречие и при други задачи от същия вид. Така с помощта и на индуктивни разсъждения се забелязва, че каквото и число да се посочи за частно се достига до невъзможност това да е търсеното число и се обосновава, че с числото 0 не може да се дели.

Д) Изучаване на някои групи аритметични знания.

Пример 13. Използване на разместителното свойство на умножението при изучаване на таблиците за умножение. Разсъжденията при решаване на задачи от този вид се извършват по схема (1). При разглеждане на всяка таблица с помощта на дедуктивни разсъждения учениците трябва да открият, че броят на непознатите таблични произведения от дадена таблица намалява, ако се приложи разместителното свойство на умножението. Тази идея може да се илюстрира с конкретна таблица:

1.6 = 6
2.6 = 6.2 = 12 (познато произведение от таблицата за умножение с 2)
3.6 = 6.3 = 18 (познато произведение от таблицата за умножение с 3)
4.6 = 6.4 = 24 (познато произведение от таблицата за умножение с 4)
5.6 = 6.5 = 30 (познато произведение от таблицата за умножение с 5)

$$\left.\begin{array}{l}6.6 = 36\\ 7.6 = 42\\ 8.6 = 48\\ 9.6 = 54\\ 10.6 = 60\end{array}\right\}\ \text{непознати произведения}$$

От разгледаните примери се вижда, че дедуктивният подход се състои в пренасяне на знания или свойства на дадено математическо понятие обект или релация към елементите на обема на понятието. За разлика от индуктивния подход, където анализът предхожда синтезът, логиката на дедуктивният подход изисква разместване на тези мисловни операции и насочване познавателната дейност на учениците от синтез към анализ. В резултат на дедуктивни разсъждения се достига до изказване на дедуктивни умозаключения, които са верни, а не с вероятностен характер, каквито са индуктивните умозаключения.

Представените примери, както и много други, показват че в неявен вид дедукцията заема важно място в началното обучение по математика. Но за да се използват ефективно възможностите на дедуктивния подход, е необходимо да се спазват следните изисквания:

- Да не се допускат теоретизиране и прибързани обобщения;
- Логическият компонент на разгледаните задачи да бъде на втори план, а целта да бъде учениците да трупат опит за дедуктивни разсъждения;
- Да се осигурява единство на индуктивния и дедуктивен подход и да се дава предимство на индуктивните разсъждения.

Аналогия. Традуктивният подход в обучението по математика в началните класове

Аналогията е умозаключение, при което се пренася информация от един предмет на друг въз основа на определена връзка между тях (А. Бънков, 1975, 363). Аналогията е умозаключение, при което от факта, че за обектите a_1 и a_2 са верни съжденията $P_1(a_1)$, $P_2(a_1)$, ..., $P_к(a_1)$ и $P_1(a_2)$, $P_2(a_2)$, ..., $P_к(a_2)$ и освен това е вярно съждението $P_{к+1}(a_1)$, се приема, че е вярно и съждението $P_{к+1}(a_2)$. В този случай от сходството на обектите a_1 и a_2 по отношение на свойствата P_1, P_2, ..., $P_к$ и от това, че a_1 има свойството $P_{к+1}$, се счита че вероятно и a_2 има свойството $P_{к+1}$. При някои аналогии обектите a_1 и a_2 са системи, между които е налице изоморфизъм и тогава изводите са достоверни. Но се налага най-напред да се установи, че изоморфизъм съществува. Ако изоморфизъм е налице, то той се използва като общо твърдение и се разсъждава по схема (1). Когато обаче изоморфизмът не е установен, полученото по аналогия умозаключение е само правдоподобно и затова, както при непълната индукция, трябва да се търсят други подходи за строго обосноваване верността на полученото предположение или да се търси потвърждение в опита. (И. Г. Обща мет.)

В обучението по математика аналогиите имат, от една страна, евристична роля и, от друга, подпомагат и облекчават паметта. Затова разсъжденията по аналогия се използват в целия училищен курс по математика, включително и в началните класове. Традуктивните разсъждения са в основата на традуктивния подход и на изказването на умозаключения по аналогия и могат да се представят чрез следната схема:

обекти или групи елементи от обема	**свойства на обектите или групите**	
А	*a, в, c, d*	извод: $d = x$
В	*a, в, c, x*	

Без да изчерпваме всички възможности на съдържателната и дидактична страна на обучението по математика в началните класове, ще посочим някои някои от тях, при които се използва традуктивният подход.

А) Решаване на задачи, основани на връзката между операциите събиране и умножение и изваждане и деление.

Пример 14. Използване на аналогия при откриване свойствата на операциите събиране и умножение. Например:

$a + в = в + a$ и $a.в = в.a$

$(a + в) + c = a + (в + c) = a + в + c$ и $(a.в).c = a.(в.c) = a.в.c$

Пример 15. Откриване и използване връзката между правилата за намиране на неизвестен компонент на операциите събиране и умножение и изваждане и деление.

$a + x = в,\ x = в - a$ и $a.x = в,\ x = в:a$

$x - a = в,\ x = в + a$ и $x:a = в,\ x = в.a$

$a - x = в,\ x = a - в$ и $a:x = в,\ x = a:в$

Б) Използване на изоморфизма между множествата от числата от 0 до 10, от 10 до 100, от 100 до 1000 и т.н. Чрез разсъждения по аналогия учениците естествено пренасят дейностите и алгоритмите за извършване на аритметичните операции и свойствата им от едно числово множество в друго.

В) Откриване на термините на нови понятия като едноцифрени числа – двуцифрени числа – трицифрени числа – многоцифрени числа, триъгълник – четириъгълник, метър – квадратен метър и др.

Възможностите на традуктивните разсъждения трябва да се използват широко, тъй като, от една страна, учениците се улесняват в овладяването на учебното съдържание, а, от друга, се стимулира тяхната наблюдателност, широта на мислене и умения да извършват обобщаваща дейност. Ролята на аналогията се състои и в това, че тя е силно евристично средство, защото помага на учениците да открият нови обекти или непознати свойства на обекти. Тя е особено полезна при съзнателно запомняне на термини и свойства на сходни математически понятия, както и на правила и алгоритми за пресмятане с естествени числа. Така се постигат, от една страна, разбиране и икономичност при изучаване на математическите знания и от друга – се облекчава паметта. Особено внимание трябва да се обръща на случаите на "законни аналогии", основани на изоморфизъм (еднакъв строеж) между някои множества. Същевременно на учениците трябва да се посочва, че изводите, получени по аналогия, изискват строга обосновка, тъй като могат да се окажат погрешни. За целта е необходимо учениците да се предпазват от грешни аналогии чрез:

• Използване на контрапримери, с които се показва неверността на направените изводи чрез тези аналогии. Напр.”Даден е правоъгълник с дължина 6 см и ширина 4 см. Как ще се измени лицето му, ако увеличим дължината му два пъти и намалим ширината два пъти? (отговор – не се променя). А ако увеличим дължината с 2 см, а намалим ширината с 2 см?” След използване на грешна аналогия се достига до отговор на втория въпрос – не се променя. Грешната аналогия се дължи на грешно пренасяне на зависимостите между множителите и произведението към зависимостите между събираемите и сбора. Т.е. грешната аналогия при решаване на посочената задача се състои в разсъждения от вида *(а.2) . (в:2) = а.в ⇒(а + 2).(в – 2) = а.в*. Разсъжденията по аналогия, водещи до вярно умозаключение се извършват по схемата *(а.2) . (в:2) = а.в ⇒(а + 2) + (в – 2) = а + в*, т.е. ако ако увеличим дължината с 2 см, а намалим ширината с 2 см, няма да се промени обиколката на правоъгълника;

• Разкриване и обясняване на грешката в разсъжденията и в получения извод;

• Изграждане у учениците на умения за проверка и самопроверка;

• Развиване на критичност на мисленето.

Докато при дедуктивните и индуктивни разсъждения се осъществява пренос на знания, свойства и алгоритми съответно от дадено математическо понятие обект или понятие релация към елементи от обема на това понятие или обратно, при разсъжденията по аналогия се пренасят знания, свойства, правила и алгоритми от един математически обект към друг математически обект или от една група елементи от обема на дадено понятие към друга група елементи от обема на същото понятие.

Включването на елементи от логиката в обучението по математика в началните класове е целесъобразно поради единството им с аритметичните, алгебрични и геометрични знания и поради ролята на тези елементи за успешен преход от конкретно-образно към абстрактно-логическо мислене. Разсъжденията по индукция, дедукция и аналогия е необходимо да се съчетават като предимство се дава на индукцията и аналогията, тъй като те дават възможност за евристична дейност в уроците по математика и за икономичност при усвояване и запаметяване на знания, идеи, термини и др. дедукция е добре да се използва само в случаите, когато това е достъпно и обосновано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аргирова Т. и др.* Математика за 3 клас на СОУ. С., 1992.
2. *Аргирова Т. и др.* Математика за 4 клас на СОУ. С., 1993.
3. *Аргирова Т. и др.* Математика за втори клас на ЕСПУ. С., 1986.
4. *Ганчев И. и др.* Методика на обучението по математика от 8 до 11 клас, част 1. С., 1996.
5. *Ганчев И. и др.* Методика на обучението по математика от 8 до 11 клас, част 2. С., 1998.
6. *Георгиев В. и др.* Математика за 1 клас на ЕСПУ. С., 1988.
7. *Колягин Ю. и др.* Методика на преподаването по математика в средното училище, Частни методики. С., 1980.
8. *Маджаров А. и др.* Математика за 3 клас на ЕСПУ. С., 1980.
9. *Метельский Н.* Дидактика математики. Минск, 1982.
10. *Минчева, И., М. Михова.* Дидактически проблеми на началното обучение по математика – математическите понятия и математическите твърдения. Астарта. В. Търново, 2003.
11. *Минчева, И.* Методика на обучение по математика в началните класове – специална част. Астарта. В. Търново, 2002.
12. *Новакова, З.* Методика на обучението по математика в началните класове. Веда Словена. С., 1998.
13. *Пойа, Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1975.
14. *Радев Р. и др.* Математика за 1 клас на СОУ. С., 1991.
15. *Радев Р. и др.* Математика за 2 клас на СОУ. С., 1991.
16. *Столяр, А.* Педагогика математики. Минск. 1986.
17. *Шопова, Д. и др.* Математика за 1 клас, част 2. С., 1981.
18. *Шопова Д и др.* Математика за 3 клас на СОУ. С., 1992.
19. *Шопова Д. и др.* Математика за 4 клас на началното училище. С., 1993.
20. *Patilla, P.* Guide to good maths. Wiltshire, England, 1996.
21. *Schoenfeld, A.* Mathematical Problem Solving, Berkeley, California, 1994
22. *Schoenfeld, A.* Cognitive Science and Mathematics Education. London, 1994.

INFERENCES. INDUCTIVE, DEDUCTIVE AND ANALOGOUS REASONING IN TEACHING PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS

IVANKA MINCHEVA
MARINELA MIHOVA

Summary

In the study some features of using logical elements in teaching primary school mathematics are considered. Special emphasis is laid on the inductive, deductive and analogous reasoning. The theoretical ideas are illustrated by various examples from primary school course of mathematics.