АКСИОМАТИЧНИЯТ МЕТОД В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО ГЕОМЕТРИЯ

Камелия Колева, Виолета Маринова

Геометрията като една от най-старите науки се заражда още в древния Вавилон и Египет под влияние на жизнените потребности и развитието на земеделието, търговията и астрономията и има само емпиричен характер. След упадъка на египетската и шумеро-вавилонската цивилизации, геометричните им знания са усвоени в Елада. Древните гърци не само обогатяват геометрията с множество нови факти, но предприемат и сериозни стъпки към установяването им чрез поредица от разсъждения т.е. чрез доказателства.

Точна формулировка на логическите принципи за построяване на всички науки, включително и на математиката е дадена от Аристотел. За да се избегне „неприятната безкрайност" при дефиниране на понятия и доказване на твърдения на базата на преди това доказани, Аристотел предлага приемането на начални твърдения (очевидни), които не се доказват и основни (недефинирани) понятия. Така той става родоначалник на дедуктивната структура на науките.

В изпълнение на Аристотеловите принципи за структуриране на научните знания през IV в. пр.н.е. се появяват сборни съчинения, в които се правят опити за строго логично изложение на математиката. Те са изместени след написването на забележителното произведение „Елементи" („Начала") на александрийския геометър Евклид (около 300 г. пр.н.е.), в което с изключително майсторство – от гледна точка на науката от онова време – той извърва логическото развитие на геометрията чрез строго извеждане на следващи твърдения от предишните, тръгвайки от основните (9 аксиоми и 5 постулата).

Още в древността са забелязани някои недостатъци на дедуктивното изложение в „Начала" (оказва се, че 14 основни твърдения не са достатъчни за логическата строгост в доказателствата на теоремите и Евклид на места прибягва до нагледната представа и интуицията, освен това много от основните дефиниции не са такива в логическия смисъл, а само нагледни описания на геометричните фигури). Оттогава подобряването му тръгва в две направления: логическо обосноваване на аксиоматиката и опити за доказателство на петия постулат[1]. Последният привлича вниманието на математиците в продължение на 2000 години, през които са правени безуспешни опити да бъде доказан въз основа на предшестващите го аксиоми. Вместо това петият постулат само е заменян с еквивалентни твърдения.

Едва през 1823 г. Лобачевски, а малко по-късно независимо от него и Я. Бояй, достигат до мисълта, че отрицанието на петия постулат на Евклид не води до противоречие и с това създават нова геометрична система – неевклидовата геометрия.

Опитите да се поправи Евклид в петия постулат, където той е съвършено прав отклоняват за дълго време математиците от прекия път на логическо уточняване на аксиоматиката и доказателствата на Евклид. В това направление едва през XIX век са направени сериозни крачки към ново дедуктивно построяване на геометрията, отговарящо на съвременните изисквания на науката. Немският математик М. Паш в „Лекции по новата геометрия" (1892 г.) разработва аксиомите на наредбата, свързани с логически необоснованото до това време понятие „между". Една от тези аксиоми носи неговото име. Италианският учен Пеано постига логическа завършеност при излагане на аксиомите на свързването и наредбата. А неговият ученик Пиери се стреми да сведе до минимум основните понятия. Преди това Г. Кантор и Р. Дедекинд изследват аксиомите за непрекъснатост.

Изследването на аксиоматиката на евклидовата геометрия е завършено от Хилберт през 1899 г. в станалия класически труд „Основи на геометрията". В него той конструира аксиоматиката на евклидовата геометрия, разчленена по толкова естествен начин, че логическата структура на геометрията става съвършено прозрачна. Това позволява първо да се формулират аксиомите по най-прост и най-кратък начин и, второ, да се изследва докъде може да се развива геометрията, ако поставим в основата ѝ не цялата аксиоматика, а едни или други групи аксиоми. Неуточнявайки конкретния смисъл на първичните понятия – точка, права и равнина, а изяснявайки ги единствено в аксиомите, Хилберт налага разбирането, че в математиката може да се разсъждава за обекти, които нямат нагледност. Геометричните обекти, с които оперира класическата евклидова геометрия не са единствено възможните обекти на математическото изследване. След Хилберт се изменя и смисъла, който са влагали древните гърци в понятието аксиома: „очевидна истина, не изискваща доказателство", непосредствен израз на обобщените опитни факти. Съвременната наука под аксиоми разбира вече твърдения, приемани без доказателства с цел разкриване съдържанието и връзката между основните понятия и на тяхна основа построяване на дедуктивната наука.

В многовековната история на математиката създаването на нови теории и методи винаги е предизвиквало стремеж да се отразят тези постижения и в преподаването. И това е обяснимо като се има предвид, че един от най-важните принципи, прилагани в обучението е принципът за научност. Казаното с пълна сила важи за аксиоматичното изграждане на училищния курс по геометрия или както го наричат още систематичен курс по геометрия (4).

Ако се възползваме от всеизвестния биогенетичен закон, че всеки индивид през индивидуалното си развитие повтаря накратко историческото развитие на вида, в контекста на математиката това означава, че всеки човек в усвояването на математиката повтаря в съкратени срокове математическото развитие на цялото човечество (6). Следователно построяването на училищния курс по геометрия не може да не е съобразено с възрастовите особености на учащите и историческото развитие на геометрията като наука. А това означава, че аксиоматичното изграждане на училищния курс по геометрия не може да не се предшества от пропедевтичен (нагледно-интуитивен) курс по геометрия, който в съкратени срокове да повтаря развитието на геометрията в Древен Египет, Вавилон и Елада до написването на „Елементи” на Евклид.

От друга страна, училищният курс трябва да отразява обективно и същността на съвременната наука геометрия, чиито основни идеи са дедуктивният метод и аксиоматичното обосноваване. Интензивните изследвания на редица геометри от края на XIX век и началото на XX век и до наши дни – Хилберт, Паш, Веронезе, Пиери, Каган, Фален, Шур, Вайл, Бахман и други показва, че евклидовата геометрия може да се изгради върху различни първични понятия и система от аксиоми. Това естествено довежда и до спорове коя аксиоматика точно е целесъобразно (от методична гледна точка) да се постави в основата на училищния курс по геометрия.

И досега геометрията, която се изучава в училище е евклидовата, което не означава, че тя се поднася във формата, фиксирана в „Начала”. В резултат на тенденции, които започват да се проявяват още от XVIII век и изразител, на които е френският математик и механик Даламбер, в съвременните учебници по геометрия, макар и традиционни, играе твърде важна роля числото, получено при измерване на геометричните величини. Тази метрична гледна точка е принципно чужда за Евклид, въобще за духа на древногръцката геометрия. Различията между Евклид и съвременната училищна геометрия не са малки, въпреки че и сега основните обекти, с които се занимава тя, са евклидовите: точка, права, равнина, отсечка, ъгъл, триъгълник, многоъгълник, окръжност.

Такова метрично обосноваване на геометрията се съдържа в аксиоматиката на Колмогоров. Всъщност тя е предложена за пръв път от В. Ф. Каган през 1902 г. , а по-късно А. Н. Колмогоров я видоизменя и приспособява за училищния курс по геометрия. Аксиоматиката на Колмогоров е една от най-често използваните в съвременните учебници по геометрия, тъй като от една страна отговаря на принципа за научност (в нея се представят важни идеи, характерни за съвременното развитие на математиката като теоретико-множествено третиране на геометричните понятия, идеята за функция и изображение, идеята за дедуктивно построяване на математиката и др.), и в същото време осигурява изпълнение на другите дидактични принципи, преди всичко на принципа за достъпност.

В училищния курс по планиметрия, на основата на аксиоматиката на Колмогоров основни понятия са: точка и права, а основно отношение е разстоянието. Равнината се разбира като множеството от всички точки. Някои от подмножествата на равнината се приемат за прави. В аксиоматиката на така изградения курс по планиметрия се съдържат 12 аксиоми, които описват указаните 3 основни понятия и са разделени подобно аксиомите на Хилберт в 5 групи: I – Аксиоми на свързването; II – Аксиоми на разстоянието; III – Аксиоми на наредбата; IV – Аксиома за подвижността на равнината; V – Аксиома за успоредността.

Друга аксиоматика, с която са правени опити за въвеждане в училищния курс по геометрия е аксиоматиката на Вайл, която се нарича точково-векторна аксиоматика тъй като основни неопределяеми понятия в нея са точките и векторите. Основни отношения в тази аксиоматика са събиране на вектори, произведение на вектор с число, скаларно произведение на вектори и задаване на вектор с точки. Аксиомите на Вайл са разпределени в пет групи: аксиоми на събирането на вектори, аксиоми на произведението на вектор с число,аксиоми на размерността, аксиоми на скаларното произведение на вектори и аксиоми на задаването на вектори с точки.

Дедуктивното построяване на училищния курс по геометрия съществено се отличава от дедуктивното построяване на научния курс по геометрия, макар и в единия, и в другия случай аксиоматичната основа да се подбира с цел получаване на стройна математическа теория. При научното обосноваване на геометрията изборът на твърдения в качеството на аксиоми е в някаква степен несъществен и условен. Действително едно и също твърдение в една система може да бъде аксиома, а в друга – теорема, макар да не е по-малко очевидна, отколкото аксиомата. Иначе стоят нещата в училищния курс по геометрия. Преди всичко в качеството на аксиоми следва да се приемат такива твърдения, които са очевидни за възприемане от учащите. Някои от тези аксиоми се формулират в по-силна форма и броят им е по-малък в сравнение с аксиомите на науката геометрия. Позицията „чиста математика" и „безупречна логика" е неприложима в училищния курс по геометрия. Както пише В. Депутатов „ Пре-насянето в преподаването на елементарната геометрия на аксиоматиката на Хилберт и аксиоматичния метод в чист вид би било безумие. В средното училище не само, че не трябва да се изгони интуицията, но напротив тя трябва там да се култивира." (11)

Няма друг училищен предмет като геометрията, който да развива две противоречиви тенденции: логика и интуиция. Всъщност ние откриваме противоречие още в самото начало на систематичния училищен курс по геометрия – противоречие между реалността, представена на рисунката, от една страна, и мислителните образи или абстрактните понятия – от друга. Например права, нарисувана върху лист хартия, е съвсем различна от абстрактната представа за права, която може неограничено да се продължава. Другата страна на това противоречие откриваме в доказателствата на теоремите – изисква се те да стават по пътя на чистото логическо разсъждение и заедно с това, те неизбежно се опират на нагледните представи, тъй като редица понятия и свойства на фигурите не са уговорени в аксиомите и в по-нататъшното изложение се въвеждат от нагледни съображения. Например, не се доказва, че точка от отсечката я дели на две отсечки, че триъгълникът ограничава част от равнината. Всичко това е очевидно може да остава в училищния курс без доказателство и определение, но не се съгласува със забраната върху позоваване на очевидността.

Тези противоположности са диалектически, т.е. те са взаимно свързани и взаимнообусловени и е необходимо да се свързват в училищния курс по геометрия: в него е невъзможно да се откажем от нагледните представи и, заедно с това, е невъзможно да се откажем от логическата строгост, изискваща откъсване от нагледността.

Това противоречие между „сухата логика" и „живото въображение" в училищния курс по геометрия е обусловено от факта, че в преподаването на училищната геометрия не може да не се отчита цялата поредица от психологически фактори, които обикновено наричат възрастови особености на учащите. Необходимостта от съобразяване с тези особености води до следните методически изисквания при аксиоматичното изграждане на училищния курс по геометрия:

1. Аксиоматичното изложение да се прави на основата на пропедевтичния курс в долните класове (I–VI клас), целта на който е не само натрупване на основни геометрични знания и нагледно-интуитивни представи, но и подготовка на ученическото мислене за необходимостта от логическо доказателство.

2. Първичните понятия и аксиомите да притежават нагледност, за да бъдат готови психологически учениците да ги приемат именно без доказателство и дефиниция. При изучаване на аксиомите се прилага конкретно-индуктивния метод на обучение.

3. Прилаганата в училище логика, специално при аксиоматичното изложение, да бъде наивната, всекидневна логика, използвана в обикновените математически разсъждения. В училище е неуместна формализираната аксиоматика, при която явно се определят логическите правила, по които се извършва дефинирането и доказването.

4. С цел да не се откъсват словесно-логическите конструкции от геометричните образи е необходимо систематично и целенасочено да се използват чертежи и при въвеждането на понятията, и при формулирането и доказването на теоремите, и при решаването на задачи.

5. В училищния курс практически е невъзможно напълно да се изпълни изискването всяко геометрично твърдение да бъде доказано. Простите геометрични факти за учащите са непосредствено очевидни и доказателството им в началото на курса ще извика недоумение. Затова редица твърдения, особено тези, които интуитивно не извикват съмнения и са нагледно очевидни, се приемат без доказателство. Някои от тях е удобно да се включат в аксиомите (като се спазва системата им да е пълна и непротиворечива).

6. Понятията, въвеждани чрез определенията, да бъдат приемливи за естественото възприятие на учащите и да съответстват на техните нагледни представи.

При аксиоматичното изграждане на училищния курс по геометрия на дневен ред стоят два важни въпроса:

I. За постигането на какви цели служи изложението на училищния курс по геометрия, построен с помощта на аксиоматичния метод.

II. На какво ниво строгост трябва да се строи училищния курс по геометрия.

Отговорите на тези въпроси са важни както за учителя, така и за учениците.

Отговорите на първия въпрос са следните:

– аксиоматично-дедуктивното построяване на училищния курс по геометрия дава възможност да се разкрие структурата на геометрията и ролята на понятията (първични и производни), аксиомите и теоремите в тази структура;

– развитие на логическото мислене. Това е една от най-важните цели, защото както пише и Бланше: „Ако геометрията се преподава на децата, то е не толкова, за да бъдат научени на някои истини, а за дисциплиниране на ума, тъй като се счита, че нейното прилагане създава и развива привичка към строго логично мислене.” (5)

– в исторически аспект е известно, че геометрията исторически традиционно е „най-удобната” наука за прилагане на аксиоматичния метод;

– психологически аспект – аксиоматичния метод като средство за получаване на знания и средство за обосноваване на убеждението. За важността на аксиоматичния метод като средство за логическо обосноваване на всяка стъпка при изграждане на геометрията говори известният анекдот за учителя на един принц, който след като изчерпал всички доводи, успял все пак да накара своя ученик да приеме теоремата, като се провикнал отчаян: „Ваше величество, давам Ви честната си дума, че това е така”. А използвайки аксиоматичния метод ние безупречно можем да убедим този принц в правилността на теоремата, връщайки се назад по веригата от предшестващи твърдения и достигайки в крайна сметка до аксиомите, в които сме указали кои свойства и отношения сме приели без доказателство.

Или ако трябва да обобщим аксиоматичният метод дава на учениците материал, въз основа на който и чрез който те могат да се научат да разсъждават. Защото „прилагането на този метод в обучението по математика напомня играта „Откъде знаем?”. На тази игра играят и ученикът и учителят; играта се води по правила, известни и на единия, и на другия. Играта „Откъде знаем?” е игра, при която печелят всички.” (9)

На втория въпрос веднага може да се каже, че пълно и строго изложение на аксиоматиката в училищния курс по геометрия е невъзможно, тъй като голяма строгост означава големи трудности за учениците, т.е. нарушаване на принципа за достъпност. Както пише Ройтман в статията „За математическия курс по елементарна геометрия в средното училище": „Невъзможността на учениците в средното училище да усвоят правилно и с полза синтетичния курс по геометрия в евклидова форма е положение, твърдо установено както от дългата практика на преподаване така и от гледна точка на рационалните изисквания на педагогиката и дидактиката."

Както обикновено отговорът е може би някъде по средата: балансиране между достатъчно достъпен систематичен курс по геометрия и в същото време логично коректен, който все още не е намерил своето най-рационално решение.

Затова при изграждане на училищния курс по геометрия на основата на аксиоматичния метод трябва да се обърне внимание на следните моменти:

❖ В кой клас и върху какъв учебен материал е целесъобразно да започне аксиоматично-дедуктивното построяване на училищния курс по планиметрия? Този въпрос, както споделя Н. М. Бескин „не може да бъде разрешен теоретически, а само опитно". Той е тясно свързан с психологическите особености на учениците. Както пишат авторите на (13) „началото на систематичния курс в VI клас е в разрез с психологическите особености на децата: детето от света на ярките конкретни образи попада в света на отвлечените идеи". А както споделя в същата статия Шидловска – преподавателка в средното училище – учениците в VI клас „не разбират най-главното; не разбират необходимостта от доказателство", т.е. доказват механично теоремите, не вникват в същността на самите понятия. И това е нормално, тъй като от методиката знаем, че за тази възраст са характерни индуктивните методи и конкретно-индуктивния подход за въвеждане на понятия.

За успешното изграждане на систематичния курс по планиметрия както е известно от практиката е необходимо да се предшества от широк пропедевтичен курс, чрез който се формират не само нагледните представи, но се развива и потребността у учащите за логическо обосноваване на истинността на изследваните свойства. Началото на аксиоматичното изграждане на геометрията в VI клас би стеснило границите на нагледния курс и би рефлектирало отрицателно върху главните му цели. Естествено е на въпрос към ученик в VI клас: „С какво се занимавахте днес по геометрия?" да се отговори: „Днес цял час учителката доказва, че два еднакви триъгълника са еднакви." или „Не разбираме защо трябва да се доказва това, което и без доказателство е ясно, например перпендикулярът е по-малък от наклонената." (13)

Следователно за правилното развитие на мислителните способности на учащите, за правилното разбиране на геометрията като наука трябва аксиоматичното изложение да започва в VII клас. А имайки предвид психологическите особености на учениците от горната училищна възраст, която започва в VIII клас: „Благодарение на по-богатия минал опит и знания възприятията стават много точни и пълни. А поради засилената мисловна дейност не се задоволяват само да описват и констатират наблюдаваните факти, но има тенденция да ги обясняват, да разсъждават върху тях, да правят обобщения” (14), смятаме, че би било по-успешно аксиоматичното изграждане на планиметрията да започне и в VIII клас, но предвид по малкия брой часове по математика в горен курс по сега действащите учебни програми и изучаването и на последния дял стереометрия, това би довело до значително намаляване на броя часове, които се полагат на такъв голям раздел като планиметрията.

❖ Каква аксиоматика да се постави в основата на систематичния курс по планиметрия, с по-малък или с по-голям брой аксиоми? При избора на училищна система от аксиоми активно работят двата дидактически принципа – за достъпност и за научност.

В своя статия Б. Петканчин аргументирано посочва предимствата на Хилбертовата аксиоматика пред другите възможни аксиоматики за училищния курс (7). Според него тя „съдържа твърдения за прости и лесно обозрими факти”, а „аксиомите за конгруентността в Хилбертовата система са твърде нагледни за ученика с опита от долните класове” в сравнение с аксиомите за разстоянието, тъй като „числото не стои в началото за детето, а се получава като резултат от някаква операция”.

Според нас Хилбертовата аксиоматика е неподходяща за училищния курс по планиметрия по следните причини:

1) Хилберт 23 века след Евклид изгражда геометрията чисто евклидовски, т.е. без използване на аритметиката и на движението. А както пише Борел „Чисто евклидовските методи вече не са в крак с прогреса на съвременната математика; геометрията изучава групата на движенията”. (16)

2) Използва сложните аксиоми за непрекъснатост на Архимед и Кантор, а от тях по сложен начин чрез елементи от анализа се извежда съществуването и единствеността на мярка на отсечки и ъгли.

С цел подобряване на пункт 1) Шур изгражда строго евклидовата геометрия като запазва всички достойнства на Хилбертовата аксиоматика и използва като основно понятие важното за геометрията понятие движение.

Такъв начин на изложение има и методически предимства, тъй като води до по-достъпно построяване на училищния курс по геометрия, понеже ученикът е заобиколен от множество нагледни примери за движение (например при преместване на един предмет от едно място на друго той не се променя – еднаквост). Но въпреки това и двете аксиоматики оставят на заден план третирането на метричния характер на евклидовата равнина и при тях геометрията остава изолирана от другите области на математиката.

Последното е много добре застъпено в аксиоматиката на Колмогоров, която според нас е много подходяща за училищния курс по геометрия и поради това, че трудните аксиоми за непрекъснатост са избегнати, по-точно те са пренесени в аритметиката. Въпросната аксиоматика съществено използва теорията на реалните числа, а според Б. Петканчин „всяка аксиоматика, която тръгва от реалните числа като разстояния за целите на преподаването е твърде изкуствена". Понятието разстояние е твърде близко до жизнения опит на учениците, защото „още преди началото на систематичния курс по геометрия са натрупали голям обем интуитивно-емпирични представи за него. Нещо повече – те владеят достатъчно добре това понятие на оперативно равнище, по правило достатъчно уверено прилагат свойствата на разстоянието при решаването на практически задачи. Иначе казано, налице е нужната приемственост между пропедевтичния и систематичния курс". (9)

Метрично обосноваване на евклидовата геометрия има и в аксиоматиката на Погорелов. Основни понятия в нея са точка, права, принадлежност на точка и права, лежи между, дължина на отсечка и градусна мярка на ъгъл и съдържа 10 аксиоми, обособени в 6 групи: аксиоми за принадлежност, аксиоми на наредбата, аксиоми за мярка на отсечки и ъгли, аксиоми за съществуване на отсечка и ъгъл с дадени мерки, аксиома за съществуване на триъгълник, еднакъв с даден триъгълник и аксиома за успоредност. Тя е подходяща за училищния курс и поради това, че с помощта на аксиомите за съществуване на мерки на отсечки и ъгли се преодоляват големите трудности, свързани с наредбата върху правата и измерването според аксиоматиките на Хилберт и Шур.

Разбира се, множество привърженици има и идеята за векторно аксиоматизиране на училищния курс. Но този „царски път" (според Г. Шоке) при изучаването на геометрията е подходящ за специализираните училища (математически и някои професионални гимназии със засилено изучаване на математика), но не и за масовото средно училище, тъй като аксиомите на векторното пространство не са отнапред интуитивно ясни на учениците, а и те предполагат да е построено полето на реалните числа, което в училищния курс по математика не се прави.

❖ След като се реши в кой клас и с каква аксиоматика да се изгражда училищния курс по планиметрия остава много по-важния въпрос как точно да стане това. Разбира се, трябва да се спазят изискванията, които по-горе посочихме като не е необходимо още от самото начало учениците да преминат през едно пълно аксиоматично изложение, т. е. да се дадат всички аксиоми наведнъж, а след това да се използват, където потрябва (както е например в учебниците на Погорелов).

Акисоматиките, които установихме, че са удачни в училище са разделени на групи от аксиоми. Хубаво би било, ако те се въвеждат така и в училищния курс, като при това се доказват колкото се може преки следствия от всяка въведена група аксиоми или от няколко групи. Така учениците ще добият представа отделни части от геометрията на каква съвкупност от аксиоми се базират и по-ясно ще осъзнаят необходимостта от доказване на твърдения, които са „очевидни”. Във връзка с последното чертежите трябва да се правят по възможност в хода на логическите разсъждения, а не преди да започне решението на задачата. В началото на систематичния курс е хубаво доказателствата да се извършват подробно чак до позоваване на аксиомите, докато в по-нататъшното изложение могат да се дават в по-съкратен вид.

В края на курса по планиметрия може да се даде пълен списък на аксиомите и да се запознаят учениците с някой модел на евклидовата геометрия, изградена по дадената аксиоматика. Освен това може да се запознаят учениците и с други геометрии – неевклидова, елиптична и др.

Така учениците ще добият по-пълна представа не само за същността на аксиоматичния метод, но и за връзката на математиката с другите науки, а също и за нейната практическа насоченост към опознаване на реалния свят, защото както е казал А. Н. Колмогоров „Математиката е тази, посредством която хората управляват природата и себе си”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров, И. П.* Геометрия, Просвещение. М., 1979.
2. *Хилберт, Д.* Основи на геометрията. С., НИ, 1978.
3. *Евклид.* Елементи. Т. I. С., НИ, 1972.

4. *Върбанова, М., Ив. Ганчев.* Методика на обучението по математика, специална част. В. Търново, 2002.

5. *Бланше Робер.* Аксиоматика. С., НИ, 1969.

6. *Ганчев, Ив., М. Върбанова.* История на математиката, курс лекции, Унив. изд. “Св. св. Кирил и Методий”. В. Търново, 1994.

7. *Петканчин, Б.* Геометрията и съвременното училище. – Математика и физика, 1971, № 3.

8. *Петканчин, Б.* Основи на математиката. С., НИ, 1968.

9. *Колягин, Юр. М. и кол.* Методика на преподаването на математика в средното училище, частни методики. С., НП, 1980.

10. *Привалов, И. И.* Аналитическая геометрия. М., 1961.

11. *Депутатов, Б.* Основания геометрии. – Математика в школе. М., 1983, № 3.

12. *Погорелов, А. В.* Геометрия. М., Н., 1983.

13. *Горбатый, П. А., Т. Я. Нестеренко.* Когда начинать изучение систематического курса геометрии в средней школе? – Математика в школе, 1949, № 1.

14. *Пирьов, Г. Д.* Детска психология. С., НИ, 1971.

15. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе, IX–X кл. М., Просвещение, 1983.

16. Осъвременяване на обучението по математика, сборник статии, I част. С., НП, 1976.

БЕЛЕЖКИ

[1] Ако в равнината една права **c** пресича правите **a** и **b** така, че сборът на прилежащите към едната страна на **c** ъгли е по-малък от два прави, то **a** и **b** се пресичат и от страната на тези ъгли.

АКСИОМАТИЧНИЯТ МЕТОД В
УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО ГЕОМЕТРИЯ

КАМЕЛИЯ КОЛЕВА, ВИОЛЕТА МАРИНОВА

Резюме

В статията се разглеждат основните цели и задачи, свързани с аксиоматичното изграждане на училищния курс по геометрия, посредством различни аксиоматики (на Колмогоров, на Хилберг и др.).

THE AXIOMATIC METHOD IN
SCHOOL GEOMETRY COURSE

KAMELIA KOLEVA, VIOLETA MARINOVA

Summary

In this paper the main aims and taske, associated with the axiomatic construction of the school course in geometry, using different axiomatics (e.g. Kolmogorov's, Hilbert's, etc.) are considered.