ОТНОСНО СЛОЖНОСТТА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА НАМИРАНЕ НА ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ И ИЗГРАЖДАНЕ НА УМЕНИЯ ЗА РЕШАВАНЕТО ИМ

Николай Горчев, Камелия Колева

С ускоряване на научно-техническия прогрес и мащабното развитие на информационните технологии нараства обемът от знания, които трябва да получат студентите по време на обучението им във ВУЗ. Целта и съдържанието на образованието стават все по-динамични и изискват адекватни методи и съответствуваща организация. Все по-трудно (а в бъдеще сигурно и съвсем невъзможно) става предаването на известните на човечеството знания и факти в техния цялостен обем. Една от важните предпоставки за усвояване на необходимите знания е активността на човека, стремящ се към познание, творческото му отношение към предмета на своята дейност.

Важно значение за активизацията на учебната дейност на студентите има по-нататъшното усъвършенствуване на формите и методите на обучение. Наблюденията и опитът показват, че много от студентите се учат без да използват напълно своите възможности. Има редица изследвания, посветени на причините за това, а също и такива, разработващи методики за преодоляване на този недостатък. В тази връзка е и въпросът за правилната организация на самостоятелната работа на студентите. Централно място в структурата и съдържанието на самостоятелната работа заемат задачите. Задачата е не само “ядро”, но и средство за управление на самостоятелната работа, средство за активизация на учебната дейност като цяло. Затова е необходимо изучаването и изследването на задачите и на тази основа построяването на системи от задачи, ориентирани към зоната на близко развитие, чрез които да се реализира идеята за индивидуален и диференциран подход в обучението, да се създава у студента интерес към знанието, да се обуславя мотивацията и като следствие да се активизира учебната дейност.

В настоящата разработка ще посочим един подход за построяване на система от задачи за самостоятелна работа по темата “Граница на функция”.

За основа ще ни служи възприетият в [1] подход на Ю. Колягин при определянето на понятието задача, в който за отправен пункт се използва понятието система като множество от елементи, заедно с отношенията (релациите) между тези елементи, или между техните свойства. В задачата се отделят четири основни компонента:

- A – начално състояние;
- B – крайно състояние;
- R – решение на задачата;
- C – базис на решението на задачата.

На базата на основните компоненти се прави типология на задачите в зависимост от броя на компонентите, неизвестни за решаващия в даден момент.

В своето изследване [2] В. И. Крупич, изхождайки от това, че математическата задача може да се разглежда като диалектическа връзка между субективна и обективна информация, откроява в нея две структури: външна и вътрешна. Външната структура той нарича информационна. От гледна точка на последната, към посочените вече от Ю. Колягин компоненти, Крупич добавя още един компонент – основното отношение в системата отношения между даденото и търсеното. Тази компонента той разглежда като необходимо условие за установяване на вътрешната структура на задачата, на нейните елементи. А вътрешната структура от своя страна определя стратегията (ориентировъчната основа) на способа за решение на задачата и нейната сложност.

Според това положение задачата е непразно множество от елементи, в което е определено предварително зададено отношение с фиксирани свойства. Това отношение той нарича основно отношение в системата отношения между даденото и търсеното. Основната релация в общия случай изразява функционалната зависимост между величините, участвуващи в даденото и търсеното (условието и заключението) на задачата. То е реализирано върху предметната област на задачата – множеството от фиксираните обекти (предмети), за които става дума в задачата. Тази компонента, както вече споменахме, участвува при установяване на връзката между външната и вътрешната структура на задачата.

Ако знаем вътрешната структура на задачата, според автора, се появява възможност, знаейки стратегията за нейното решаване, да се извърши целенасочено търсене на решение. В същото време структурата на задачата дава възможност за определяне на нейната сложност, а оттам и да се установи определена наредба в представяните за решаване задачи.

В изследването се разработва и начин за определяне сложността на задачата като обективна характеристика. Тя се определя от броя на елементите, броя на връзките и видовете връзки, които образуват вътрешната структура на задачата.

Елементи на задачата наричаме минималните компоненти на задачата, на които е реализирано основното отношение.

Задачите за намиране на граница на функция, които в по-голяма част се разглеждат в семинарните занятия със студенти по темата "Граница на функция" имат за основна цел да ги обучат на техника за намиране на граници на някои класове функции. При тези задачи множеството от обектите (условията), с които трябва да се извършат определени действия (операции), а и самото множество от операции, са предварително зададени. Например:

Задача: Да се намери $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

При решаването на тази задача студентите непосредствено възпроизвеждат новото правило за намиране на граница на неопределеност от вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Те имат знанията, необходими за решаването на задачата, известен им е и алгоритъма за решаване, известно е и функционалното отношение $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Анализирайки техниката за намиране на граница на функция, можем да откроим следните основни действия и операции, влизащи в състава на дейността по търсене на граница.

1. Определяне вида на неопределеността.

2. Установяване на прийома, необходим за отстраняване на получения вид неопределеност.

В учебната литература са посочени няколко такива основни прийоми:

а) съкращаване на общ множител;

б) рационализиране на числителя или знаменателя на дроб или и на двете едновременно;

в) изнасяне на най-високата степен на неизвестното;

г) използване на формулата за основната граница $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и следващите от нея формули за еквивалентност;

д) използване на формулата за основната граница $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ и следващите от нея важни граници: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

3. Прилагайки един от търсените прийоми и теоремите за граници, можем да намерим търсената граница.

Пример: Да се намери $\lim_{x\to 0} x.\cot gx$.

1. Определяме вида на неопределеността. Получаваме неопределеност от вида $[0.\infty]$.

2. Извършваме преобразувания, довеждащи до изменение на вида на неопределеността:

$$\lim_{x\to 0} x.\cot gx = \lim_{x\to 0}\frac{\cot gx}{\frac{1}{x}}$$

Новата неопределеност е от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. След това прилагаме теоремата за граница на частно и основната граница $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

3. Получаваме последователно:

$$\lim_{x\to 0} x.\cot gx = \lim_{x\to 0}\frac{\cot gx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\cos x}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Виждаме, че търсенето на границата се извършва на 4 стъпки. Всяка стъпка е действие, т.е. относително завършен елемент на човешката дейност, насочен към достигане на определена цел. Например, целта на второто действие е промяна на неопределеността от вида $[0.\infty]$ във вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Очевидно е, че вида на неопределеността поражда съответния прийом за решение, т.е. системата от преобразувания, насочена към съкращаване или изменение на вида на неопределеността. Преходът от един прийом към друг, основаващ се на известни теореми, не нарушава равносилността. Следователно системата от преобразувания за отстраняване на неопределеността може да се приеме като елементи от структурата на задачата за намиране на граница на функция.

Основното отношение в задачите за намиране на граница на функция е $\lim_{x\to a} f(x)=b$. Ако намирането на границата става чрез непосредствено прилагане на теоремите за граници, ще считаме, че задачата няма обем на сложност, тъй като в този случай не е налице необходимостта от прилагане на някакви специфични начини, а са необходими само навици за аритметични изчисления. Сложността на такава задача приемаме за равна на 0.

В останалите случаи елементите на задачата ще означаваме с кръгче ◯ и ще съединяваме с чертичка само тези, които следват един след друг, без да ги разделя изменението на неопределеността. Това са явните връзки в структурата на задачата. Елементите, които се разделят от изменението на вида на неопределеността, са неявни и тях не ги свързваме с чертичка.

Имайки предвид казаното, структурата на разгледаната задача има вида ◯ ◯–◯.

По структурата можем да определим сложността на задачата като обективна характеристика по формулата $S = m + n + l$, където m е броят на елементите, n – броят на явните връзки, l – броят на видовете връзки (явни или неявни) в структурата на задачата. Числото l може да приема само три стойности: 0, 1 или 2, а именно: $l = 0$, когато структурата на задачата се състои само от един елемент, т.е. няма място за явни и неявни връзки; $l = 1$, когато в структурата на задачата има само един тип връзки – само явни или само неявни; $l = 2$, когато в структурата на задачата има и явни, и неявни връзки.

В нашия случай $S = 3 + 1 + 2 = 6$.

За да има еднозначност при построяване на вътрешната структура на задачата за намиране на граница на функция въз основа на посочения механизъм приемаме следните уговорки:

1. Елемент на структурата, се нарича минимален компонент, притежаващ свойствата на цялото, т.е. на който се реализира отношение, адекватно на основното отношение $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

2. Между два елемента от структурата има явна връзка, само ако следват непосредствено един след друг, т.е. не се разделят от изменение на неопределеността.

3. Между два елемента от структурата на задачата има неявна връзка, ако се разделят от изменение на вида на неопределеността.

4. Елементи от структурата на задачата се наричат “изолирани”, ако между тях са установени неявни връзки.

Така разработеният начин за определяне на сложността на задачата за намиране на граница на функция дава възможност на студентите да вникнат в същността на процеса на решаване на задачата. Дава се възможност и на преподавателя така да подрежда задачите, че да води студентите от решаване на задачи с по-малка степен на сложност към задачи с по-голяма степен на сложност.

Ще дадем и една такава примерна подредба на задачи:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3},\ S=0$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, ○ $S=1$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-2x^2+1}{x^2-x-6}$, ○ $S=1$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$, ○ $S=1$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x.\sin x}$, ○–○ $S=4$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$, ○–○ $S=4$

7. $\lim\limits_{x\to \infty} x.(\sqrt[x]{a}-1)$, ○ ○ $S=3$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+tgx)^{\cot gx}$, ○ ○ $S=3$

Така разработения начин за определяне на сложността на задачите за намиране на граница на функция позволява да се задават задания на студентите, при които те по дадена структура да конструират задачи за намиране на граница на функция. Такива задания способстват за по-пълно и в по-голям обем усвояване на учебния материал, за развитие на математическата им самостоятелност и внасят в процеса на изучаване на темата “Граница на функция” елементи на творчество, развиват мисленето, спомагат за придобиване на основни навици и умения при решаването на задачи по тази тема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ганчев, Ив., Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров*. Методика на обучението по математика VIII–XI клас. Първа част. Модул. София, 1996.

2. *Крупич, В. И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. Москва, Прометей, 1995.

ОТНОСНО СЛОЖНОСТТА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА НАМИРАНЕ НА ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЯ И ИЗГРАЖДАНЕ НА УМЕНИЯ ЗА РЕШАВАНЕТО ИМ

НИКОЛАЙ ГОРЧЕВ, КАМЕЛИЯ КОЛЕВА

Резюме

В статията е разработен начин за определяне на сложността на задачите за намиране на граница на функция, при което се изисква прилагане на теоремите за граница на функция и някои основни граници. Въз основа на това се дава примерна подредба на задачи по темата с цел активизиране на студентите при усвояването на тези знания не само в семинарните занятия по математически анализ, а и в тяхната самостоятелна работа.

ABOUT THE COMPLEXITY OF THE PROBLEMS FOR FINDING OF LIMIT OF FUNCTION AND FORMING OF ABILITIES FOR THEIR SOLVING

NIKOLAY GORCHEV, KAMELIA KOLEVA

Summary

In this paper is developed a method for specifying the problems about complexity to find the limit of function which needs to apply the theorems for limit of function and some basic limits. On the basis of that method an exemplary mathematical tasks system is proposed. It aims to activate the students not only during their seminar’s training, but also during their self training.