ПОНЯТИЕТО ВЕЛИЧИНА

Николай Горчев

I. Въведение

В началното и средно училище, както и в историческия процес на развитие на човешките знания, числото влиза в две основни функции: естественото число – като средство за броене на предмети, а рационалните и реални числа – като средство за измерване на величини.

За първи път понятието величина е възникнало във философската литература. Древногръцкият философ Аристотел пише: „Едно или друго количество е множество, ако то може да се брои; е величина , ако то може да се измери."

В книгата на Евкалид „Начала" няма понятие за величина, но в нея се изброяват аксиоми, които описват общите свойства на величините: равните на едно и също са равни помежду си; ако към равни прибавим равни, то и целите ще бъдат равни помежду си; цялото е по-голямо от своите части и т.н.

В книгите по математика често пъти се дават описателни „определения" на понятието величина. Например, Херон Александрийски пише: „ Величина е всичко, което може да бъде увеличено или разделено безгранично." Л. Ойлер дава такова определение: „Величина е всичко това, което е способно да се увеличава или намалява.", а в учебника по геометрия на Г. Грасман, в който за първи път се обосновават много теоретични положения в тази наука, понятието величина се описва също така неясно: „Величина е всяко нещо, което може да бъде признато за равно, или неравно на друго нещо."

За тези и подобните им определения А. Лебег пише: „По такъв начин се създава теория, която да може да се прилага едновременно за обема и честолюбието, за температурата и апетита, за държавния бюджет и за плодородието на почвата, за ума и нивото на водата в Сена, за удивлението и образованието."

Понятието „величина" е едно от основните понятия, употребявано не само в математиката, но и в други научни дисциплини. При това понятието „величина" много трудно се поддава на ясно описание, тъй като в различните научни дисциплини и дори в различните раздели на една и съща дисциплина му се придава различен смисъл. Нещо повече, терминът „величина" често се използва като синоним на термина „количество" или в термините „величина" и „стойност на величина" се влага един и същ смисъл. В геометрията такова двояко значение се среща често: например говорим за „дължина" изобщо и за „дължина" на дадена отсечка. Въобще в традиционния училищен курс по математика почти никога не се правят опити за ясно описание на това какво трябва да се разбира под термина „величина". Както вече споменахме, до голяма степен това се обяснява с факта, че понятието „величина" не е специфично математическо понятие, а също така и с това, че в методическата литература това понятие не е получило още достатъчно ясни разяснения.

Преди всичко няма ясен отговор дори на въпроса целесъобразно ли е да се трактуват в училищния курс по математика величините като някакви множества, като определени съвкупности от свойства на множества или като определени свойства на функции и т.н.

От казаното дотук (като добавим и това, че използването на понятието „величина" в училищния курс трябва да е в съответствие с трактовката му в науката) произтича затрудненото положение, в което са поставени учителите по математика (и особенно тези, които тепърва започват своята практика) при разглеждане на понятията дължина на отсечка, лице на многоъгълник, обем на тяло в училищния курс. За преодоляване на това затруднение съвсем не допринася и съществуването в методическата литература на две различни схващания за същността на изброените по горе понятия.

При едното схващане понятията дължина на отсечка, лице на многоъгълник и обем на тяло се третират като геометрични величини, съществуващи преди и независимо от измерването. Критиците на това схващане отбелязват, че при него дължината на отсечката е отсечка, заградена от нейните крайни точки, лицето на фигура е част от равнината, заградена от контура на фигурата, обемът на тяло е частта от пространството, заградено от повърхнината на тялото, т.е. смесват се понятията отсечка и дължина на отсечка, многоъгълник и лице на многоъгълник, тяло и обем на тяло. Избирайки съответната мерна единица, се получават числа – наречени мерни числа на дължината на отсечката, на лицето на многоъгълник и на обема на тялото. При това схващане се разглеждат три вида обекти: геометрични фигури (ГФ), геометрични величини (ГВ) и реални положителни числа (РПЧ), със съответствията:

$$ГФ \rightarrow ГВ \rightarrow РПЧ$$

Критиците на това схващане считат, че така не е ясно какво точно се измерва : геометричните фигури или геометричните величини и освен това според тях наличието на понятието „величина”, което е твърде неопределено, усложнява нещата.

При второто схващане понятията дължина на отсечка, лице на многоъгълник и обем на тяло са реални положителни числа, които се съпоставят по определен начин на съответните геометрични фигури. То предполага разглеждането на два вида обекти: геометрични фигури (ГФ) и реални положителни числа (РПЧ)

$$ГФ \to РПЧ$$

Счита се, че при тази трактовка е ясно какво се измерва и освен това се изпуска неясното понятие величина. Това схващане е реализирано в преди действащите и сегашните учебници по математика. То изглежда по-издържано в логическо отношение и по-достъпно за учениците.

Да разгледаме по-подробно това второ схващане. При съпоставянето на реални или математически обекти на реални числа стремежът е интересуващите ни отношения и операции да преминават в някои естествени отношения и операции в множеството на реалните числа. Това позволява като извършваме едни или други операции с числа, да стигаме до определени изводи за реалните обекти. Разбира се, трябва да се има предвид, че при съпоставянето на реалните обекти на реални числа, а на операциите с обектите – операции с реални числа, ние правим предположения, които обикновенно явно не се формулират. Например не може без допълнителни ограничения да се каже, че основавайки се на равенството 1+1=2, когато обединяваме две множества, съдържащи по един елемент, винаги получаваме множество от два елемента.

Също така в някои случаи съпоставянето на числа и обекти се прави без отчитане на отношенията в даденото множество. В този случай числата се използват само за различаване на обектите.

Когато използваме числа за описване на множества, в които е дефинирана релация на наредба, те отразяват резултатите от сравняването на два обекта. Например, ако имаме камъни и везни само с блюда, ние можем да подредим камъните по тегло и да ги номерираме в този ред, но не можем да кажем с колко един камък е по-тежък от друг. (Ако имаме равни по тегло камъни вече се нарушава и отношението на наредбата.)

Числата могат да се изпозват и при разлагането на множество на класове. Типичен пример е цифровата система за оценяване на знанията на учениците. Наредбата на числата трябва да отразява определена градация в знанията на учениците, но не може да се каже например, че знанията на ученик получил оценка 4, с толкова превъзхождат знанията на този, получил оценка 3, с колкото отсъстват от знанията на този, получил оценка 5. Равенството 5–4=4–3, вярно в математиката, губи смисъл, когато тези числа служат за измерване знанията на учениците.

В този смисъл при определение на понятията дължина на отсечка, лице на многоъгълник и обем на тяло, чрез втория подход могат да възникнат допълнителни затруднения от формално-логична гледна точка, свързани чрез сравняване чрез единицата мярка. Така например, когато на два еднородни обекта (макар и да не е ясно защо например на отсечка не може да се съпостави лице, след като и дължината и лицето са съпоставени числа) се съпоставят различни числа, какво означава едното число да е по-голямо от другото? Дали само че фигурите са различни, или че едната е „по-голяма" от другата (съдържа я)? Ако числата са равни, значи ли това, че обектите са еднакви?

Както се вижда и към двата подхода могат да се отправят доста критики и затова ние считаме, че по въпросът за величините трябва да се изгради ясно становище в методологическата литература и от там вече може да се мисли до каква степен могат да се правят обосновани отстъпки от строгостта в училищния курс с оглед нивото на развитие на учениците на съответния етап, на който ще се запознават със съответната величина.

II. Положителни скаларно-адитивни величини

Както вече споменахме, понятието величина е едно от основните математически понятия, възникнало в процеса на развитие на математиката. Общото понятие „величина" е непосредствено обобщение на конкретни понятия (дължина, лица, обеми, маса и т.н.), свойствата на които са формулирани още в „Начала"-та на Евклид. Всеки конкретен род величини е свързан с определен начин за сравняване на съответните свойства на обектите. Например отсечки се сравняват чрез налагане и това налагане води до понятието дължина; две отсечки имат една и съща дължина, ако при налагане съвпадат; ако една отсечка се налага върху част от друга, то нейната дължина е по-малка от дължината на втората. Отделяйки (абстрахирайки се) общото, съдържащо се във всички равнолицеви равнинни фигури стигаме до понятието лице в чист вид, но за да означим различните лица с различни символи трябва да изберем единица мярка.

Единствено удачният изход е да съпоставим тези общи свойства на дължините, лицата и обемите, които позволяват да ги изразяваме при избрана единица мярка с число и да направим всяка съвкупност от обекти, притежаващи тези свойства „системи величини”. Но това не е нищо друго, освен аксиоматичен метод.

Първичните понятия в аксиоматичната теория на скаларно-адитивните положителни величини са непразно множество S^+ , елементите на които са еднородни величини, които ще означаваме с V_i^+, $i \in N$, с дефинирана в него операция събиране, която ще означаваме с $+_i$ и релация на нестрога наредба – $\leq_i$ (като за всеки конкретен вид величини съществува определен начин за провеждане на събирането и сравняването на елементите). Елементите на множеството S^+ ще наричаме скаларно-адитивни положителни величини V_i^+ , а елементите на всяко V_i^+ ще наричаме състояния на величината V_i^+ и ще означаваме с малките букви от латинската азбука. Аксиомите на тази теория са:

A_1. За всеки две състояния a и b на величината V_i^+ е в сила точно една от релациите $a =_i b; a <_i b$ или $a <_i b$.

A_2. (аксиома за събирането) За всеки две състояния a и b на величината V_i^+ съществува единствено състояние $c \in V_i^+$, такова, че $c =_i a +_i b$ и се нарича сбор на a и b. Операцията събиране във V_i^+ притежава свойствата:

a) $a +_i b =_i b + a, \forall a, b \in V_i^+$ (комутативност)

b) $(a +_i b) +_i c =_i a +_i (c +_i b), \forall a, b, c \in V_i^+$ (асоциативност)

c) $a <_i a +_i b$ и , $b <_i b +_i a$, $\forall a, b \in V_i^+$ (монотонност)

A_2 (аксиома за изваждането). Ако $b <_i a$, където $a,b \in V_i^+$, съществува единствено състояние c такова, че $b +_i c =_i a$. Означава се още $c =_i a -_i b$.

A_4. За произволно състояние $a \in V_i^+$ и произволно естествено число n съществува състояние $b \in V_i^+$, такова, че $nb =_i a$ (тук $nb =_i b +_i b +_i ....+_i b$). Равенството от тази аксиома можем да запишем още и така:

$b =_i \dfrac{a}{n}$. Доказва се, че това състояние се определя еднозначно. Това свойство дава възможност за неограничено деление на една величина на части.

A_5. (аксиома на Евдокс – Архимед). За произволни състояния $a,b \in V_i^+$ съществува такова естествено число n, че $a <_i nb$.

A_6. (аксиома за непрекъснатостта). Ако редицата от състояния $a_1 <_i a_2 <_i ... <_i a_n <_i ... <_i ... <_i b_n <_i ... <_i b_2 <_i b_1$, на V_i^+ притежава свойството, че $b_n -_i a_m <_i c$ за всяко състояние $c \in V_i^+$, при достатъчно голям номер n, то съществува единствено състояние $x \in V_i^+$, което е по-голямо от всички a_n и по -малко от всички b_n.

Математическата теория с така въведените първични понятия и аксиоми $A_1 \div A_6$, се нарича аксиоматична теория на положителните скаларно-адитивни непрекъснати величини. Ако за произволна такава величина V_i^+ изберем едно от нейните състояния e за единично (мащаб), то произволно нейно състояние a се представя еднозначно във вида $a =_i \alpha e$, където α е положително реално число, и се нарича мярка на състоянието a. В този случай се казва, че величината V_i^+ е измерима.

От аксиомите може да се изведе още, че за всяка величина съществува напълно определено състояние, наречено нулево състояние или само „нула” на тази величина, което притежава свойството

$$a +_i 0 =_i a \ , \ \forall a \in V_i^+$$

III. Скаларно-адитивни величини

Ако разгледаме насочените отсечки върху права, температурата и др., т.е. такива величини, за които е характерно изменението в две взаимно противоположни посоки относно дадена отправна точка естествено ще стигнем до обобщаването на системата на положителните скаларно-адитивни непрекъснати величини, а именно системата на скаларно-адитивните непрекъснати величини.

Първичните понятия са аналогични на първичните понятия в теорията на положителните скаларно-адитивни непрекъснати величини: – множество на скаларно-адитивни непрекъснати величини, елементите му , алгебрична операция събиране „+” и релация на нестрога наредба . Аксиомите на теорията са:

Първичните понятия са аналогични на първичните понятия в теорията на положителните скаларно-адитивни непрекъснати величини: S – множество на скаларно-адитивни непрекъснати величини, елементите му $V_i ; i \in N$, алгебрична операция събиране „+” и релация на нестрога наредба $\leq_i$. Аксиомите на теорията са:

A_1^1. Съвпада с A_1;

A_2^1. Съвпада с A_2, с изключение на свойството монотонност, което приема вида:

b) ако $a <_i b$, то $a +_i c <_i b +_i c ; \forall c \in V_i ;$

A_3^1. За всеки две състояния $a, b \in V_i$, съществува единствено нейно състояние c, такова, че $a =_i b +_i c$;

A_4^1. Съвпада с A_4.

A_5^1. За произволно състояние $a \in V_i$ и произволно положително състояние $b \in V_i$ съществува естествено число n, такова, че $a <_i nb$;.

A_6^1 Съвпада с A_6.

Ако за произволна скаларна величина V_i изберем едно нейно състояние e за единично (мащаб), то произволно състояние $a \in V_i$, се представя еднозначно във вида $a =_i \alpha e$, където α е реално число и се нарича мярка на състоянието a. В този случай се казва, че величината V_i е измерима.

Ще прецизираме казаното по-горе със следващите определения:

<u>Определение 1:</u> Величината V_i^+ се нарича измерима, ако може да се построи изображение $\mu : V_i^+ -> R^+$ (R^+ е множество на реалните положителни числа) за което:

1) Ако $a =_i b$, то $\mu(a) = \mu(b); \forall a, b \in V_i^+$;

2) Ако $a =_i b +_i c$, то $\mu(a) = \mu(b) + \mu(c); \forall a, b, c \in V_i^+$;

3) Съществува $e \in V_i^+,$ такова, че $\mu(e) = 1$.

<u>Определение 2:</u> Числото $\mu(a)$ се нарича мярка на състоянието $a \in V_i^+$.

<u>Определение 3:</u> Състоянието $c \in V_i^+$, се нарича обща мярка за състоянието a и b на V_i^+ , ако съществуват естествени числа n и m, такива че $a =_i nc$ и $b =_i mc$.

Не е трудно да се види, че ако две състояния на дадена величина имат обща мярка, те имат безброй много такива общи мерки.

Състояния, които имат обща мярка, се наричат съизмерими.

За въвеждането на мярка на състояние на произволна скаларно-адитивна непрекъсната величина трябва да се използва цялото множество R.

.

IV. Заключение

Разбира се, освен скаларни величини съществуват и друг вид величини, на които тук няма да се спираме. Ще споменем само класа на векторните величини, тензорните величини, случайните величини в теорията на вероятностите и др.

Темата за измерването на величините е една от най-важните: измерването на величините е изходен пункт за всички приложения на математиката.Тъй като приложната математика очевидно предхожда чистата или още логиката на математиката, то обичайно се счита, че началото на измерването на лица и обеми лежи в самите източници на геометрията. От друга страна, измерването довежда до числото, т.е предмета на анализа. Затова за измерване на величини се говори както в началното и средно училище, така и във ВУЗ. Ние считаме, че това което се прави на тези три степени на обучение е добър образец, който по-добре ще послужи за формирането на бъдещите учители, отколкото изискваното от тях за разработването на отделните уроци. Но това излиза извън рамките на тази работа.

Да разгледаме накратко въпроса за въвеждането на понятието величина в училищния курс по математика. Очевидно трябва да се построи определена методическа система за работа, като се има предвид решението на двояка задача – обучение на практическо прилагане на понятието величина във връзка с измерването и запознаване с формално-логичната същност на това понятие.

В обучението на учениците се използват величини, изучаването на които илюстрира общото понятие величина при съответната постановка на обучение. Изучаването се извършва концентрично. Най-вътрешният (първият) кръг е пропедевтичен. На този етап се развива интуитивната представа за величините и практическото им измерване, споменават се т.нар „именувани числа" и се въвеждат най-простите единици за измерване. Очевидно на този етап става дума за приложната страна на въпроса. Въпросът за формално-логичната страна даже не се поставя.

Следващият етап може условно да се нарече етап на изучаване на методите за косвено измерване на величините. Тук се получават знания и се създават навици, свързани с приложната страна на въпроса, изучават се многобройни факти, които позволяват да се премине от непосредствено измерение на величините към пресмятания. Но заедно с тази страна на въпроса, изучаването на която се основава на достатъчно здрава формално-логическа основа, на този етап се поясняват елементи на пропедевтиката, на строгото въвеждане на понятието величина и нейното измерването. Тук в курсовете по алгебра и геометрия се говори за величини и числа, за отношения на величини, при изучаването на лица се говори не само за начините на пресмятането, но и за това какво е лице и т.н.

Най-после в горните класове въпросът за намирането на лицата и обемите се поставя на напълно съвременна основа, т.е. дава се и удовлетворителна от гледна точка на равнището на сторгост дефиниция на тези понятия и достатъчно общи методи за премятане. Що се отнася до формално-логичната същност на понятието скаларна величина, то на съвременното равнище на обучението, изглежда и в горните класове ще се ограничаваме само с констатацията на възможността за аксиоматична дефиниция на това понятие или в най-добрия случай ще говорим за него обзорно.

Считаме, че за бъдещите учители не е достатъчно изискването да придобият техническа ловкост и умения да прилагат учебника. Необходимо е те да изпитват нужда от извършване на продължителни размишления от гледна точка на логическата и педагогическа критика над това, което им се налага да преподават, а също така самостоятелно или под някакво ръководство, да изследват всяка значителна глава от математиката.

Каква полза ще извлекат преподавателите от такова изследване? Очевидно е, че при познаването на най-доброто и пълно изложение на математическите факти, ще могат да сравняват различни способи на изложение, отделяйки техните силни и слаби страни, и при необходимост да могат да създават нови методи. Тези разсъждения ще покажат всички възможности, които логиката дава на нашия разум, а също така и че без разум логиката ни води до неуспехи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин, Н. Я.* Математика 4–5 клас. Теоретични основи. София, Народна просвета, 1976.

2. Методика на преподаването на математиката в средното училище. Частни методи. София, Народна просвета, 1980.

3. *Петров, Д., Д. Цветков.* Математика за начални учители, част 2. В. Търново, 1999.

ПОНЯТИЕТО ВЕЛИЧИНА

НИКОЛАЙ ГОРЧЕВ

Резюме

Въпросът за величините и тяхното измерване в училищния курс по математика все още не е получил своето изясняване в методическата литература. От това произтичат и различни схващания, свързани с изучаването на тези въпроси, залегнали в учебниците по математика. Изградили сме аксиоматична теория за скаларните величини и тяхното измерване като стъпка за поставяне на тези въпроси в съответствие с научната им трактовка.

THE NOTION QUANTITY

NIKOLAY GORCHEV

Summary

The different concepts for the quantities, used in the school textbooks in mathematics and their measurement are considered. An axiomatic theory for introducing the scalar quantities is proposed.